MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

29. BAND 5. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 9. April 1929)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1929

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen und deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Tübingen, Neckarhalde 55,
L. Lichtenstein, Leipzig, Großgörschenstraße 3,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

29. Band. **Inhalt:** 5. Heft.

Seite

Bergmann, St., Über Hermitesche unendliche Formen, die zu einem Bereiche gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen 641
Bompiani, E., Ein Analogon der Quadrik von Lie in der projektiven Flächentheorie 678
Shohat, J. A. (Jacques Chokhate), On some properties of polynomials 684
Shoda, Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen 696
Reidemeister, K., Knoten und Verkettungen 713
Bochner, S., Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme 730
Bochner, S., Ein Satz über lineare Operationen 737
Hopf, E., Bemerkungen zu einem Satze von S. Bernstein aus der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen 744
Khintchine, A., Über ein Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung 746
Druckfehlerberichtigung 752

Über unendliche Hermitesche Formen, die zu einem Bereiche gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen.

Von

Stefan Bergmann in Berlin.

In einer früheren Arbeit[1]) wurde mit Hilfsmitteln der Algebra von unendlich vielen Veränderlichen die Frage der Abbildung eines ebenen zusammenhängenden Bereiches B durch eine normierte Funktion $w(z)$ [$w(0)=0$, $w'(0)=1$] einer komplexen Veränderlichen untersucht. Es wurde dort gezeigt, daß zu jedem B ein und nur ein ausgezeichneter Bereich existiert, der als Minimalbereich bezeichnet wurde. Der Minimalbereich ist dadurch charakterisiert, daß ihn eine normierte [von $w(z) \equiv z$ verschiedene] Funktion $w(z)$ stets auf einen Bereich von größerer Fläche, als der ursprüngliche, abbildet. Diese Betrachtungen lassen sich im Zusammenhang mit der Frage der Entwickelbarkeit nach Orthogonalfunktionen der im Bereich B regulären Funktionen $h(z)$ mit endlichen $\iint_B h(z)\,\overline{h(z)}\,d\omega_z$ bringen. Als Orthogonalfunktionensystem wurde ein System von Funktionen

$$\Omega_\nu(z) \tag{1}$$

definiert, die die Eigenschaft besitzen, daß

$$\iint_B \Omega_\nu(z)\,\overline{\Omega_\mu(z)}\,d\omega_z = \begin{cases} 1 & (\nu=\mu) \\ 0 & (\nu\neq\mu) \end{cases} \tag{2}$$

wobei $d\omega_z$ das Flächenelement von B bedeutet.

[1]) Vgl. dazu die Arbeit: „Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen", Math. Annalen **86** (1922), S. 237–271; siehe ferner die Aufsätze „Über die Bestimmung der Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals aus seinem Periodizitätsmoduln mit Anwendungen auf die Theorie des Transformators", Math. Zeitschrift **19** (1923), S. 8–25 und „Über eine Darstellung der Abbildungsfunktion eines Sternbereiches", Math. Zeitschrift **29** (1929), S. 481–486. Wir werden im folgenden diese Arbeiten mit I, II und III bezeichnen.

In der genannten Arbeit wurde gezeigt, daß sich jede Funktion $h(z)$ nach einem vollständigen Orthogonalfunktionensystem in B entwickeln läßt.

Die Funktionaldeterminante der Funktion $w(z)$, die B auf einen Minimalbereich abbildet und in bezug auf den inneren Punkt a von B normiert ist, ist dem Kern K des in B vollständigen Orthogonalfunktionensystems Ω_s gleich; mit anderen Worten, es ist:

$$\frac{dw(z)}{dz} = \frac{\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \Omega_\nu(z)\,\overline{\Omega_\nu(a)}}{\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \Omega_\nu(a)\,\overline{\Omega_\nu(a)}} \equiv \frac{\mathsf{K}(z,\bar{a})}{\mathsf{K}(a,\bar{a})}. \tag{3}$$

Ist der Bereich B einfach zusammenhängend, so ist sein Minimalbereich das Innere K eines um den Punkt O, als Mittelpunkt, geschlagenen Kreises. Die Funktionaldeterminante der Funktion, welche die Abbildung von B auf K vermittelt, ist somit durch (3) gegeben.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit besteht darin, die geschilderten Anwendungen der Algebra von unendlich vielen Veränderlichen auf die Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen zu verallgemeinern.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{B}$ einen ganz im Endlichen gelegenen, von stückweise regulären, doppeltpunktlosen, dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten berandeten Bereich des P_4[2]*), so läßt sich zeigen, daß $\mathfrak{B}$ sich durch ein normiertes Funktionenpaar $V(X,Z)$, $W(X,Z)$ von zwei komplexen Veränderlichen X, Z auf einen Minimalbereich abbilden läßt.* Unter dem (in bezug auf den Punkt $0,0$) normierten Funktionenpaar wird ein Paar V, W verstanden, für welches:

$$\begin{aligned} &V(0,0)=0, \quad \left(\frac{\partial V(X,Z)}{\partial X}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} = 1, \quad \left(\frac{\partial V(X,Z)}{\partial Z}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} = 0, \\ &W(0,0)=0, \quad \left(\frac{\partial W(X,Z)}{\partial X}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} = 0, \quad \left(\frac{\partial W(X,Z)}{\partial Z}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} = 1, \end{aligned} \tag{4}$$

gilt.

Im Gegensatz zu den Verhältnissen des P_2 läßt sich im P_4 jeder Minimalbereich volumentreu auf eine ganze Schar von Bereichen (vermittels normierter Funktionenpaare V, W mit der Funktionaldeterminante $\left|\frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)}\right| \equiv 1$) abbilden. Man muß deswegen von Klassen von Minimalbereichen sprechen. Bringt man ähnlich wie in P_2 diese Fragen in Zusammenhang mit den Orthogonalfunktionen [d. h. Funktionensystemen $\Omega_\nu(X,Z)$, die den Orthogonalitätsrelationen

---

[2]) Mit P_n werden wir stets den n-dimensionalen Raum bezeichnen.

$$(5)\qquad \int\int_{\mathfrak{B}}\int\int \Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega_p(X,Z)}\,d\omega_{XZ} \begin{cases} = 1 & s = p \\ = 0 & s \neq p \end{cases}$$

unterliegen] so gelangt man zu analogen Sätzen, wie in P_2.

Jede im offenen Bereich $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $h(X,Z)$ mit endlichen $\int\int_{\mathfrak{B}}\int\int h(X,Z)\,h(X,Z)\,d\omega_{XZ}$ *läßt sich nach einem vollständigen Orthogonalfunktionensysteme in $\mathfrak{B}$ entwickeln.*

Die Funktionaldeterminante des in bezug auf den inneren Punkt von $\mathfrak{B}$: $a\,b$ normierten Funktionenpaares $V(X,Z)$, $W(X,Z)$, welches $\mathfrak{B}$ auf einen Minimalbereich abbildet, also $\frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)}$ ist dem Ausdruck

$$(6)\qquad \frac{\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \Omega_\nu(X,Z)\,\overline{\Omega_\nu(a,b)}}{\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \Omega_\nu(a,b)\,\overline{\Omega_\nu(a,b)}} \equiv \frac{\mathsf{K}(X,Z;\overline{a,b})}{\mathsf{K}(a,b;\overline{a,b})}$$

gleich.

Ein Kreisbereich[3]) ist eo ipso ein Minimalbereich. *Läßt sich $\mathfrak{B}$ auf einen Kreisbereich $\mathfrak{K}$ abbilden, so ist die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)}$ des Paares, die diese Abbildung leistet, durch* (6) *gegeben.*

Während die oben geschilderten Betrachtungen in P_2 dazu genügt haben, zu jedem Bereich einen und nur einen Minimalbereich herzustellen, auf diese Weise ein Kriterium zu gewinnen, ob zwei gegebene Bereiche B und B' durch eine normierte Funktion $w(z)$ in einander übergeführt werden können und die Minimalfunktion zu berechnen (d. h. z. B. im Falle, daß B einfach zusammenhängend ist, die Kreisabbildungsfunktion auszurechnen), gestalten sich die Verhältnisse in P_4 in dieser Hinsicht viel komplizierter, denn es gibt kontinuierlich viel Minimalbereiche, die zu derselben Klasse gehören. Die Formel (6) gibt uns nur den Wert der Funktionaldeterminante des Abbildungspaares, und schließlich ist, auch wenn $\mathfrak{B}$ sich auf einen Kreisbereich abbilden läßt, durch die einzelne Invariante (sein Volumen) der Kreisbereich keineswegs bestimmt.

---

[3]) Die Kreisbereiche wurden von Herrn Reinhardt in der Arbeit „Über Abbildungen durch analytische Funktionen zweier Veränderlichen", Math. Annalen **83** (1921), S. 211–255 eingeführt. (Vgl. insbesondere I. Teil, § 5.) Unter einem Kreisbereich versteht Herr Reinhardt einen einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen gelegenen Bereich des P_4, dessen Berandung die dreidimensionale Mannigfaltigkeit $\sqrt{\xi^2+\eta^2} = g\left[\sqrt{(\zeta^2+\tau^2)}\right]$ ist. ξ, η, ζ, τ sind die kartesischen Koordinaten des P_4, g eine eindeutige, reelle, stetige, für positive reelle Werte des Argumentes definierte Funktion. Ein Kreisbereich entsteht dadurch, daß wir einen gewissen Bedingungen unterworfenen ebenen Bereich um die reelle Ebene im P_4 drehen.

Wir werden im folgenden unter Kreisbereich stets den Reinhardtschen Kreisbereich verstehen.

In § 2 werden diese neu aufgetauchten Fragen — durch eine weitere Ausbildung der in § 1 befolgten Methoden — behandelt.

Weiß man, daß sich der Bereich $\mathfrak{G}$ auf einen Kreisbereich abbilden läßt, dessen Randmannigfaltigkeit durch eine Gleichung von der Form

$$|W| = g(|V|), \qquad O \leqq V \leqq R_1 \tag{7}$$

gegeben ist, so entsteht die Aufgabe aus $\mathfrak{G}$ sowohl die reelle Funktion g wie auch das Funktionenpaar

$$\begin{aligned} X &\equiv V + a_{20} V^2 + a_{11} VW + a_{02} W^2 + a_{30} V^3 + a_{21} V^2 W + \dots, \\ Z &\equiv W + b_{20} V^2 + b_{11} VW + b_{02} W^2 + b_{30} V^2 + b_{21} V^2 W + \dots, \end{aligned} \tag{8}$$

welches $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{G}$ abbildet, zu bestimmen. Wir machen zunächst — der allgemeine Fall wird später behandelt — die Voraussetzung, daß das System

$$X^\nu Z^\mu \tag{9}$$

in $\mathfrak{G}$ vollständig ist. Es liegt dann nahe das Minimum von

$$\iiint_{\mathfrak{G}} u_{nm}(X, Z)\, \overline{u_{nm}(X, Z)}\, d\omega_{XZ} \tag{10}$$

zu bestimmen, wobei zur Konkurrenz nur Funktionen zugelassen werden, deren Funktionselement um den Nullpunkt mit dem Polynom

$$\sum_{(\nu\mu)=1}^{(\nu\mu)=(nm)} \alpha_{\nu\mu} X^\nu Z^\mu \tag{11}$$

beginnt. Es läßt sich leicht zeigen, daß dieses Minimum existiert und durch eine endliche Hermitesche Form

$$\begin{aligned} L_{nm} \equiv 4\pi^2 \Big\{ & \int_0^{R_1} \frac{R g^2(R)}{2}\, dR\, |\alpha_{00}|^2 \\ & + \int_0^{R_1} \frac{R^3 g^2(R)}{2}\, dR\, |\alpha_{00}(b_{11} + 2a_{20}) + \alpha_{10}|^2 \\ & + \int_0^{R_1} \frac{R g^4(R)}{4}\, dR\, |\alpha_{00}(2b_{02} + a_{11}) + \alpha_{01}|^2 \\ & + \int_0^{R_1} \frac{R^5 g^2(R)}{2}\, dR\, |\alpha_{00}(3a_{30} + b_{21} + 2a_{20} b_{11} - 2a_{11} b_{20}) + \alpha_{10}(b_{11} + 3a_{20}) + \alpha_{01} b_{20} + \alpha_{20}|^2 \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \int_0^{R_1} \frac{R^{n+1} g^{m+2}(R)}{m+2}\, dR\, |\dots + \end{aligned} \tag{12}$$

gegeben ist.

Andererseits kann man dasselbe Problem in Zusammenhang mit der unendlichen Hermiteschen Form

$$f(\alpha^*_{\nu\mu}, \overline{\alpha^*_{\nu'\mu'}}) \equiv \sum \alpha^*_{\nu\mu}\, \overline{\alpha^*_{\nu'\mu'}}\, A_{\nu\mu\nu'\mu'}, \tag{13}$$

$$A_{\nu\mu\nu'\mu'} \equiv \iint_{\mathfrak{B}} X^\nu Z^\mu \overline{X^{\nu'} Z^{\mu'}}\, d\omega_{XZ}$$ [4])

bringen. Bedeute f_p den p-ten Abschnitt der Form (13) und $J^{(p)}_{nm}$ das Minimum (4) der Form f_p bei der Nebenbedingung:

$$\alpha^*_{00} = \alpha_{00}, \quad \alpha^*_{10} = \alpha_{10}, \quad \alpha^*_{01} = \alpha_{01}, \quad \ldots, \quad \alpha^*_{nm} = \alpha_{nm}. \tag{14}$$

Es existiert, wie man leicht einsieht, $J_{nm} = \lim\limits_{p\to\infty} J^{(p)}_{nm}$ und, wie in der Arbeit bewiesen wird, ist:

$$J_{nm} = L_{nm}. \tag{15}$$

Es existiert ferner auch der Grenzwert $J = \lim\limits_{(nm)\to\infty} J_{nm} = \lim\limits_{(nm)\to\infty} L_{nm}$, den wir als die Jacobische Reduzierte der Form f bezeichnen. Für J läßt sich eine zweite von $\lim\limits_{(nm)\to\infty}$ (12) verschiedene Darstellung angeben.

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein: Sei M die Matrix

$$\begin{array}{ccccccc}
A_{0000} & A_{1000} & A_{0100} & A_{2000} & A_{1100} & \cdots \\
A_{0010} & A_{1010} & A_{0110} & A_{2010} & A_{1110} & \cdots \\
A_{0001} & A_{1001} & A_{0101} & A_{2001} & A_{1101} & \cdots \\
A_{0020} & A_{1020} & A_{0120} & A_{2020} & A_{1120} & \cdots \\
A_{0011} & A_{1011} & A_{0111} & A_{2011} & A_{1111} & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{array} \tag{16}$$

$$A_{\nu\mu\nu'\mu'} \equiv \iint_{\mathfrak{B}} X^\nu Z^\mu \overline{X^{\nu'} Z^{\mu'}}\, d\omega_{XZ}.$$

Mit $M^{(n)}$ bezeichnen wir einen Abschnitt von M, der aus n Zeilen und n Kolonnen besteht, und mit $D^{(n)}$ die Determinante der Matrix $M^{(n)}$. Die Minoren von $D^{(n)}$ werden wir $D^{(n)}_{11}$, $D_{\text{II VI}\,23}$, ... nennen, wobei sich die römischen Zahlen (oder Zahlen in Klammern) auf die fehlen-

[4]) Da wir mit Funktionen von zwei Veränderlichen operieren, werden wir meistens Doppelindizes benutzen. Wir werden in folgendem stets die Reihenfolge

$$(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), \ldots$$

festhalten. Der Kürze halber führen wir noch folgende Abkürzungen ein: $n = (\nu\mu)$ bedeuten, daß das n-te Glied der Reihe zu nehmen ist; $(\nu\mu) > (\nu'\mu')$ bzw. $(\nu\mu) < n$ sagt aus, daß das Glied $(\nu\mu)$ nach dem Gliede $(\nu'\mu')$ bzw. vor dem n-ten Glied kommt; schließlich bedeutet $\sum\limits_{(\nu\mu)=1}^{(\nu\mu)=n}$ die Summation über die n ersten Glieder der Reihe.

den Kolonnen, die arabischen auf die fehlenden Zeilen von $D^{(n)}$ beziehen. Unter Benutzung dieser Bezeichnungen (die zur Vermeidung des Aufschreibens der unendlichen Determinanten eingeführt sind) erhalten wir folgende Formel:

$$
\begin{aligned}
(17)\quad J = & \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}}{D^{(p)}_{\mathrm{I}\,1}} \left|\alpha_{00}\right|^2 \\
& + \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{1\,\mathrm{I}}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\,12}} \left| \alpha_{00} \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I}\,2}}{D^{(p)}_{\mathrm{I}\,1}} + \alpha_{10} \right|^2 \\
& + \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\,12}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,123}} \left| \alpha_{00} \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\,23}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\,12}} + \alpha_{10} \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\,13}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\,12}} + \alpha_{01} \right|^2 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Durch den Vergleich der beiden Darstellungen (12) *und* (17) *gelangen wir zu den Relationen*:

$$
(18)\qquad \int_0^{R_1} \frac{R^{2\nu+1}\, g^{2\mu+2}(R)}{2\mu+2}\, dR = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{n\to\infty} \frac{D^{(n)}_{\mathrm{I\,II}\ldots(k-1)\,12\ldots k-1}}{D^{(n)}_{\mathrm{I\,II}\ldots(k)\,12\ldots k}}
$$

$$
(\nu\mu = k),
$$

woraus wir R_1 (den Radius des Schnittkreises des Kreisbereiches mit der Ebene $X=0$) und die Funktion $g(R)$ bestimmen können. Ferner erhalten wir zur Bestimmung der $a_{\nu\mu}$ bzw. $b_{\nu\mu}$ (vgl. (8)) die Formeln:

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
b_{20} &= -\lim_{n\to\infty} \frac{D^{(n)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,124}}{D^{(n)}_{\mathrm{I\,II\,IV}\,123}}, \\
a_{20} &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{D^{(n)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,123}}{D^{(n)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,143}} + \frac{D^{(n)}_{\mathrm{I}\,2}}{D^{(n)}_{\mathrm{I}\,1}} \right] \quad \text{usw.}
\end{aligned}
$$

Ähnlich gehen wir bei der Abbildung von zwei beliebigen Bereichen vor und erhalten die entsprechenden Resultate (vgl. S. 675).

Eine weiter sich aufdrängende Frage besteht im wesentlichen darin, die sämtlichen Abbildungen des Kreisbereiches in sich und der Kreisbereiche aufeinander zu untersuchen, die durch Funktionenpaare $V^* W^*$ vermittelt werden, welche die Bedingung (4) *nicht* befriedigen.

Prinzipiell ist diese Frage durch unsere früheren Betrachtungen gelöst. Wir brauchen nur unseren Kreisbereich $\mathfrak{K}$ zu verschieben bzw. analytisch zu verdrehen. (Bezüglich „analytisch verdrehen“ vgl. Reinhardt, loc. cit. S. 214.) Wir bezeichnen den verschobenen und verdrehten Bereich mit $\mathfrak{T}$. $\mathfrak{T}$ ist in bezug auf das alte Koordinatensystem kein Kreisbereich mehr. Wenden wir unsere früheren Betrachtungen auf $\mathfrak{T}$ an, so können wir $\mathfrak{T}$ auf einen neuen Kreisbereich $\mathfrak{K}^*$ (vermittelst eines Funktionenpaares V^*, W^*)

abbilden. Setzt man die der Verschiebung und der Verdrehung entsprechenden Transformationen mit $V^* W^*$ zusammen, so erhalten wir diejenigen Abbildungen, die $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{K}^*$ abbilden. ($\mathfrak{K}^*$ kann natürlich $\mathfrak{K}$ oder ein zu $\mathfrak{K}$ ähnlicher Kreisbereich sein.) Da aber die Ergebnisse dieser Untersuchung nicht genügend übersichtlich sind, so werden wir mit Hilfe anderer, einfacherer Methoden diese Frage untersuchen, was einer neuen Arbeit vorbehalten sein soll.

Ein weiteres wichtiges Problem ist die Frage der Abbildung von Bereichen, die durch nichtanalytische Drehungen auseinander entstehen.

Die Darstellung (19) für J ist insofern speziell, als sie nur für spezielle Bereiche $\mathfrak{G}$ gilt, in denen das System $X^\nu Z^\mu$ vollständig ist. Nimmt man ein in einem (anfangs der Arbeit definierten) Bereiche $\mathfrak{B}$ vollständiges Orthogonalfunktionensystem $\Omega_s(X, Z)$ zu Hilfe, so gelangt man zu einer neuen Darstellung für J:

$$J = \frac{1}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}} |\alpha_{00}|^2$$

$$\left| \begin{array}{c} \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} \\ \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}} \\ \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\Omega_s(a,b)} \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}} \end{array} \right|$$

$$- \alpha_{00} \frac{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}}}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}} + \alpha_{10} \Bigg|^2$$

. . . . . ,

die für jedes $\mathfrak{B}$ gilt. Mit Hilfe der Darstellung (20) gelangen wir zu den bei einer Transformation durch ein (in bezug auf den Punkt $a\,b$) normiertes Funktionenpaar invarianten Zahlenreihe. Wie man sich leicht überlegen kann, ist *die notwendige Bedingung dafür, daß ein Gebiet* $\mathfrak{B}$ *auf ein anderes* $\mathfrak{B}'$ (durch ein in bezug auf den Punkt a, b normiertes Funktionenpaar) *sich abbilden läßt, die, — daß die zu jedem Gebiet gehörige unendliche Zahlenreihe*

$$(21)\quad \frac{1}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}, \quad \frac{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}{\left| \begin{array}{cc} \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}} \\ \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}} \end{array} \right|}, \ldots$$

für die beiden Gebiete übereinstimmt. Lassen sich die Bereiche $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}'$ auf Kreisbereiche abbilden, so ist diese notwendige Bedingung auch hinreichend.

Die sukzessive Berechnung der Koeffizienten [vgl. Formel (19)] gibt die Möglichkeit an die Hand — im Prinzip wenigstens — festzustellen, ob sich ein Bereich $\mathfrak{B}$ auf einen Kreisbereich $\mathfrak{K}$ (bzw. beliebigen Bereich $\mathfrak{B}'$) abbilden läßt. Man braucht dazu nur mit Hilfe der Formeln (19) formal die Funktionselemente V und W zu berechnen und festzustellen, worauf $\mathfrak{K}$ vermittelst V und W abgebildet wird. Ist der auf diese Weise erhaltene Bereich der Ausgangsbereich $\mathfrak{B}$, so ist die Abbildung $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{B}$ möglich, ist es dagegen nicht der Fall, so ist die Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf einen Kreisbereich nicht möglich.

Eine detaillierte Untersuchung dieser Frage wird an einer anderen Stelle erfolgen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die hier betrachtete Frage ein Spezialfall eines allgemeineren Problems ist: Es seien zwei Bereiche β und β' des n-dimensionalen Raumes gegeben. Ferner seien uns n abgeschlossene Moduln $M^{(k)}$ von Funktionen $V^{(k)}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ von n Veränderlichen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gegeben. Jeder Modul besitze eine unendliche Basis $V_1^{(k)}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $V_2^{(k)}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, ... derart, daß jede Funktion $V^{(k)}$, die zu dem Modul $M^{(k)}$ gehört, sich in der Umgebung des Nullpunktes in der Form

$$V^{(k)} = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s V_s^{(k)}$$

darstellen läßt, wo α_s Konstanten sind. Unser Problem lautet: Gibt es n Funktionen $V^{(k)}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, die den Bereich β des X-Raumes auf den Bereich β' des V-Raumes abbilden? Die in der Arbeit I und der vorliegenden eingeführten Methoden lassen sich auf dieses Problem unter gewissen einschränkenden Bedingungen anwenden.

Insbesondere kann man sie auf die Abbildungsfragen $2n$ dimensionaler Gebiete vermittels n Funktionen von n komplexen Veränderlichen ohne Schwierigkeiten erweitern.

§ 1.

$\mathfrak{B}$ sei ein ganz im Endlichen gelegener, zusammenhängender, von stückweise regulären, doppeltpunktlosen, dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten berandeter schlichter Bereich des P_4. Mit ξ, η, ζ, τ seien reelle Kartesische Koordinaten des P_4 mit $X \equiv \xi + i\eta$, $Z \equiv \zeta + i\tau$ komplexe Veränderliche bezeichnet.

Es sei ferner

$$\Omega_1(X, Z), \ \Omega_2(X, Z), \ \ldots \tag{1}$$

eine (unendliche) Folge von Funktionen, die

I. im Innern von $\mathfrak{B}$ regulär —,

II. in bezug auf den Bereich $\mathfrak{B}$ orthogonal sind, d. h. es ist

$$\int\int_{\mathfrak{B}}\int\int \Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega_p(X,Z)}\,d\omega_{XZ} = 1 \qquad s=p, \tag{2}$$
$$= 0 \qquad s\neq p,$$

wobei $d\omega_{XZ}$ das (vierdimensionale) Volumenelement im XZ Raume ist. Unter $\int\int_{\mathfrak{B}}\int\int$ wird stets ein uneigentliches Integral $\lim\limits_{n\to\infty}\int\int_{\mathfrak{B}_n}\int\int$ verstanden, wobei $\mathfrak{B}_n$ eine Folge ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegener Bereiche, die gegen $\mathfrak{B}$ konvergieren, ist[5]);

III. die $\Omega_s(X,Z)$ $(s=1,2,3,4,5,\ldots)$ bilden ein in $\mathfrak{B}$ vollständiges System, d. h. für jede in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion H mit endlichen $\int\int_{\mathfrak{B}}\int\int H(X,Z)\,H(\overline{X},\overline{Z})\,d\omega_{XZ}$ besteht die Beziehung:

$$\int\int_{\mathfrak{B}}\int\int H(X,Z)\,H(\overline{X},\overline{Z})\,d\omega_{XZ} = \sum_{s=1}^{s=\infty}\Big|\int\int_{\mathfrak{B}}\int\int H(X,Z)\,\overline{\Omega_s(X,Z)}\,d\omega_{XZ}\Big|^2.$$

Wir wollen beweisen:

Satz I. *Der Kern der Folge* (1)

$$\mathsf{K}(X,Z;\overline{X},\overline{Z}) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega_s(X,Z)} \tag{3}$$

ist eine im Innern von $\mathfrak{B}$ *beschränkte Funktion von* X, Z.

Es soll zuerst als

Hilfssatz I bewiesen werden: *Ist* $F(X,Z)$ *eine in einem abgeschlossenen Kreisbereiche* $\mathfrak{K}$ *um den Nullpunkt reguläre Funktion, so ist*

$$\int\int_{\mathfrak{K}}\int\int F(X,Z)\,\overline{F(X,Z)}\,d\omega_{XZ} = |F(0,0)|^2\int\int_{\mathfrak{K}}\int\int d\omega_{XZ} \tag{4}$$

$$+\left|\left(\frac{\partial F(X,Z)}{\partial X}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}}\right|^2\int\int_{\mathfrak{K}}\int\int |X|^2\,d\omega_{XZ} + \left|\left(\frac{\partial F(X,Z)}{\partial Z}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}}\right|^2\int\int_{\mathfrak{K}}\int\int |Z|^2\,d\omega_{XZ}$$

$$+\left(\frac{1}{2!}\right)^2\left|\left(\frac{\partial^2 F(X,Z)}{\partial X^2}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}}\right|^2\int\int_{\mathfrak{K}}\int\int |X^4|\,d\omega_{XZ}+\cdots.$$

---

[5]) Versteht man unter $\mathfrak{C}$ eine geschlossene, stückweise reguläre Mannigfaltigkeit, so versteht man unter dem Abstand eines Punktes a, b von $\mathfrak{C}$ das Minimum der Entfernungen des Punktes a, b von beliebigem Punkt von $\mathfrak{C}$. Durchläuft a, b eine geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{C}_n$, so wird das Maximum der Abstände des Punktes a, b als die maximale ($\varrho_{\max}$) und das Minimum als minimale Entfernung ($\varrho_{\min}$) bezeichnet. Limes $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}$ bedeutet, daß die maximale Entfernung $n\to\infty$ ($\varrho_{\max}$) der Berandungen der $\mathfrak{B}_n$ von $\mathfrak{B}$ mit wachsendem n gegen Null konvergiert.

Nach einem bekannten Hartogsschen Satz[6]) läßt sich $F(X, Z)$ in $\mathfrak{R}$ in der Form

$$F(X,Z) = F(0,0) + X\left(\frac{\partial F(X,Z)}{1!\,\partial X}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} + Z\left(\frac{\partial F(X,Z)}{1!\,\partial Z}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} + X^2\left(\frac{\partial F(X,Z)}{2!\,\partial X^2}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} + \cdots \tag{5}$$

darstellen. Aus (5) folgt die Beziehung (4), da man — infolge der Regularität im abgeschlossenen $\mathfrak{R}$ — gliedweise integrieren kann, und da:

$$\iiiint_{\mathfrak{R}} X^\nu Z^\mu \overline{X^{\nu'} Z^{\mu'}} = \iiiint_{\mathfrak{R}} |X^\nu Z^\mu|^2 \, d\omega_{XZ} \qquad (\nu\mu) = (\nu'\mu'), \tag{6}$$

$$= 0 \qquad (\nu\mu) \neq (\nu'\mu').$$

ist.

Korollar. *Ist $F(X, Z)$ in $\mathfrak{B}$ regulär, so ist*

$$|F(a,b)| \leqq \frac{\sqrt{2\iiiint_{\mathfrak{B}} F(X,Z)\,\overline{F(X,Z)}\,d\omega_{XZ}}}{\pi\,\gamma_{ab}^2}, \tag{7}$$

wo γ_{ab} den Abstand des inneren Punktes ab von der Berandung des Bereiches bedeutet.

Um jetzt den Satz I zu beweisen, betrachten wir folgende (endliche) Extremumaufgabe:

Wir wollen in dem Ausdruck

$$U_p(X,Z) \equiv \sum_{s=1}^{s=p} A_s \, \Omega_s(X,Z) \tag{8}$$

die Konstanten A_s so bestimmen, daß derselbe an Stelle von w in das Integral

$$\iiiint_{\mathfrak{B}} w(X,Z)\,\overline{w(X,Z)}\,d\omega_{XZ} \tag{9}$$

eingesetzt, (9) zu einem Minimum macht, wobei zur Konkurrenz nur Ausdrücke von Form (8), die an der Stelle ab den Wert 1 haben, zugelassen sind;

$$[U_p(a,b) = 1]. \tag{10}$$

ab soll dabei ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ sein. Die Lösung dieser Aufgabe u_p ist — wie die formale Rechnung zeigt —

---

[6]) Vgl. dazu F. Hartogs, „Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten". Math. Annalen 62 (1905), S. 9 oder W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, I. Lieferung, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin (1924), S. 192.

$$(11)\qquad u_p(X,Z)=\frac{\sum_{s=1}^{s=p}\Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}{\sum_{s=1}^{s=p}\Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}$$

und der Wert des Minimums $\lambda_{ab}^{(p)}$

$$(12)\qquad \lambda_{ab}^{(p)}=\frac{1}{\sum_{s=1}^{s=p}\Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}.$$

Für $\lambda_{ab}^{(p)}$ läßt sich aber eine untere von p unabhängige Schranke angeben. Nach dem Korrollar ist für jede Funktion, also auch für u_p

$$(13)\quad \lambda_{ab}^{(p)}=\iiiint_{\mathfrak{B}} u_p(X,Z)\,\overline{u_p(X,Z)}\,d\omega_{XZ}\geqq |u_p(a,b)|^2\frac{\pi^2\gamma_{ab}^4}{2}=\frac{1}{2}\pi^2\gamma_{ab}^4.$$

Aus (13) und (12) folgt:

$$(14)\qquad \sum_{s=1}^{s=p}\Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}\leqq\frac{2}{\pi^2\gamma_{ab}^4}.$$

Da die Ungleichung (14) für jedes p gültig ist, so ist

$$(15)\qquad \sum_{s=1}^{s=\infty}\Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}\leqq\frac{2}{\pi^2\gamma_{ab}^4},$$

somit für jeden inneren Punkt $a\,b$ von $\mathfrak{B}$ beschränkt, w. z. b. w.

Es soll jetzt überdies gezeigt werden, daß $u(X,Z)\equiv\operatorname{limes}_{p\to\infty}u_p(X,Z)$ existiert und die Lösung folgender Variationsaufgabe darstellt:

Unter allen Funktionen $h(X,Z)$ mit endlichen

$$\iiiint_{\mathfrak{B}} h(X,Z)\,\overline{h(X,Z)}\,d\omega_{XZ},$$

für welche die Vollständigkeitsrelation

$$(16)\quad \iiiint_{\mathfrak{B}} h(X,Z)\,h(X,\overline{Z})\,d\omega_{XZ}=\sum_{s=1}^{s=\infty}\left|\iiiint_{\mathfrak{B}} h(X,Z)\,\Omega_s(X,Z)\,d\omega_{XZ}\right|^2$$

erfüllt ist, ist diejenige zu finden, die in das Integral (9) eingesetzt, dieses bei der Nebenbedingung

$$h(a,b)=1$$

zu einem Minimum macht.

1. Nach (15) existiert

$$(18)\qquad u(X,Z)=\operatorname{limes}_{p=\infty}u_p(X,Z)=\frac{\sum_{s=1}^{s=\infty}\Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}{\sum_{s=1}^{s=\infty}\Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}$$

in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegenen Teilbereich $\mathfrak{B}_n$ und stellt in $\mathfrak{B}_n$ eine reguläre Funktion dar.

2. Es gibt keine Funktion $h(X, Z)$ [mit $h(a, b) = 1$] die dem Integral (9) einen kleineren Wert erteilt, als $\dfrac{1}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a, b)\,\overline{\Omega_s(a, b)}}$. Denn aus (16) folgt, daß man zu jedem ε ein p bestimmen kann, derart, daß

$$(19)\qquad \left| \iiiint_{\mathfrak{B}} h(X, Z)\,\overline{h(X, Z)}\,d\omega - \sum_{s=1}^{s=p} \left| \iiiint_{\mathfrak{B}} h(X, Z)\,\overline{\Omega_s(X, Z)}\,d\omega_{XZ} \right|^2 \right| \leqq \varepsilon$$

wird. Bezeichnet man mit $h_p(X, Z)$ den Ausdruck

$$(20)\qquad h_p(X, Z) \equiv \sum_{s=1}^{s=p} \Omega_s(X, Z) \iiiint_{\mathfrak{B}} h(X, Z)\,\overline{\Omega_s(X, Z)}\,d\omega_{XZ},$$

so ist nach dem Korrollar

$$(21)\qquad \varepsilon' = h_p(a, b) - h(a, b), \qquad |\varepsilon'|^2 \leqq \frac{2\varepsilon}{\pi^2 \gamma_{ab}^4}.$$

Der Ausdruck $\dfrac{1}{1+\varepsilon'}\left[\sum_{s=1}^{s=p} \Omega_s(X, Z) \iiiint_{\mathfrak{B}} h(X, Z)\,\overline{\Omega_s(X, Z)}\,d\omega_{XZ}\right]$ erteilt an Stelle von w in (9) eingesetzt, dem Integral (9) einen Wert der gleich oder größer ist als $\lambda_{ab}^{(p)}$, also ist:

$$(22)\qquad \iiiint_{\mathfrak{B}} h(X, Z)\,\overline{h(X, Z)}\,d\omega_{XZ} \geqq \frac{1}{(1+\varepsilon')^2} \frac{1}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a, b)\,\overline{\Omega_s(a, b)}}.$$

Da man ε' beliebig klein machen kann, so ist

$$(22^*)\qquad \iiiint_{\mathfrak{B}} h(X, Z)\,\overline{h(X, Z)}\,d\omega_{XZ} \geqq \frac{1}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a, b)\,\overline{\Omega_s(a, b)}}.$$

3. Es ist

$$(23)\qquad \iiiint_{\mathfrak{B}} u(X, Z)\,\overline{u(X, Z)}\,d\omega_{XZ} = \frac{1}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a, b)\,\overline{\Omega_s(a, b)}}.$$

Denn in jedem abgeschlossenen $\mathfrak{B}_m$ ist bei genügend großen p

$$|u(X, Z)|^2 - \left| \frac{\sum_{s=1}^{s=p} \Omega_s(X, Z)\,\overline{\Omega_s(a, b)}}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a, b)\,\overline{\Omega_s(a, b)}} \right|^2 \leqq \varepsilon$$

und

$$\iiiint_{\mathfrak{B}_m} |u(X,Z)|^2 d\omega_{XZ} \leqq \iiiint_{\mathfrak{B}_m} \left| \frac{\sum_{s=1}^{s=p} \Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}} \right|^2 d\omega_{XZ} + \varepsilon \text{ (Volumen von } \mathfrak{B}_m)$$

$$\leqq \frac{1}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}} + \varepsilon \text{ (Volumen von } \mathfrak{B}).$$

Da man ε beliebig klein machen kann, und die Ungleichung (24) für jedes $\mathfrak{B}_m$ gültig ist, so ist auch

$$(24^*) \qquad \iiiint_{\mathfrak{B}} |u(X,Z)|^2 d\omega_{XZ} \leqq \frac{1}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}.$$

Aus (22*) und (24*) folgt (23).

4. Da das System $\Omega_s(X,Z)$ in $\mathfrak{B}$ vollständig ist, so ist auch für $u(X,Z)$ die Vollständigkeitsrelation (16) erfüllt.

5. Die Lösung $u(X,Z)$ ist eindeutig. Der Beweis dafür soll nachträglich geführt werden.

Satz II. *Jede in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $h(X,Z)$ mit endlichem*

$$\iiiint_{\mathfrak{B}} h(X,Z)\,\overline{h(X,Z)}\,d\omega_{XZ}$$

läßt sich nach einem in $\mathfrak{B}$ vollständigen Orthogonalfunktionensystem $\Omega_s(X,Z)$ in der Form

$$(25) \qquad h(X,Z) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(X,Z) \iiiint_{\mathfrak{B}} h(X,Z)\,\overline{\Omega_s(X,Z)}\,d\omega_{XZ}$$

in jedem (ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegenen) *Teilbereiche $\mathfrak{B}_n$ darstellen. Die Reihe* (25) *konvergiert in $\mathfrak{B}_n$ gleichmäßig und absolut.*

Die gleichmäßige Konvergenz folgt unmittelbar aus (21). Die absolute Konvergenz erhalten wir auf Grund der Schwarzschen Ungleichung

$$(26) \qquad \sum_{s=p}^{s=\infty} \left| \Omega_s(X,Z) \iiiint_{\mathfrak{B}} h(X,Z)\,\overline{\Omega_s(X,Z)}\,d\omega_{XZ} \right|$$

$$\leqq \sqrt{\left[\sum_{s=p}^{s=\infty} \Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega_s(X,Z)}\right]\left[\sum_{s=p}^{s=\infty} \left| \iiiint_{\mathfrak{B}} h(X,Z)\,\overline{\Omega_s(X,Z)}\,d\omega_{XZ} \right|^2\right]}.$$

Hierin ist der erste Faktor der rechten Seite von (26) nach (15) gleich-

mäßig in $\mathfrak{B}_n$ beschränkt; der zweite Faktor geht nach der Voraussetzung III gegen 0, woraus auch die absolute Konvergenz von (25) folgt.

Es soll nunmehr der (unter 5. angekündigte) Eindeutigkeitsbeweis der Lösung der Variationsaufgabe geführt werden. Sei $G(X, Z)$ $[G(a, b) = 1]$ eine Funktion für die

$$\iiint_{\mathfrak{B}} G(X, Z)\,\overline{G(X, Z)}\,d\omega_{XZ} = \frac{1}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a, b)\,\overline{\Omega_s(a, b)}} \tag{27}$$

ist. Wir werden zeigen, daß

$$G(X, Z) = u(X, Z) \equiv \frac{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(X, Z)\,\overline{\Omega_s(a, b)}}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a, b)\,\overline{\Omega_s(a, b)}} \tag{28}$$

sein muß. Aus der Vollständigkeitsrelation (16) folgt, daß man zu jedem ε ein p finden kann derart, daß

$$\iiint_{\mathfrak{B}} G(X, Z)\,\overline{G(X, Z)}\,d\omega_{XZ} - \sum_{s=1}^{s=p} |g_s|^2 \leqq \varepsilon, \tag{29}$$

$$g_s \equiv \iiint_{\mathfrak{B}} G(X, Z)\,\overline{\Omega_s(X, Z)}\,d\omega_{XZ}$$

wird.

Betrachten wir die Funktion

$$G_p(X, Z) \equiv \sum_{s=1}^{s=p} g_s\,\Omega_s(X, Z). \tag{30}$$

Nach den Korrollar folgt aus (29)

$$G_P(a, b) = G(a, b) + \delta_P = 1 + \delta_P,$$

wo

$$|\delta_P| \leqq \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\pi \gamma_{ab}^2} \quad \text{für} \quad P \geqq p \tag{31}$$

ist. Man kann ferner die Ableitung von G_P in der Form

$$\frac{\partial G_P(a, b)}{\partial a} \equiv \sum_{s=1}^{s=P} g_s \frac{\partial \Omega_s(a, b)}{\partial a} = (1 + \delta_P)\left[\frac{\sum_{s=1}^{s=P} \frac{\partial \Omega_s(a, b)}{\partial a}\,\overline{\Omega_s(a, b)}}{\sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(a, b)\,\overline{\Omega_s(a, b)}} + R_P^{(1,0)}\right] \tag{32}$$

darstellen. Wir wollen nun zeigen, daß

$$\operatorname*{limes}_{P \to \infty} R_P^{(1,0)} = 0$$

sein muß. Um dies einzusehen, betrachten wir das Minimum des Integral (9) [S. 650], wobei an Stelle von w ein Ausdruck von der Form

$$\sum_{s=1}^{s=P} A_s \Omega_s(X, Z) \tag{33}$$

eingesetzt werden soll, bei den Nebenbedingungen:

$$\begin{gathered}\sum_{s=1}^{s=P} A_s \Omega_s(a, b) = 1 + \delta_P, \\ \sum_{s=1}^{s=P} A_s \frac{\partial \Omega_s(a, b)}{\partial a} = (1 + \delta_P) \left(\frac{\sum_{s=1}^{s=P} \frac{\partial \Omega_s(a, b)}{\partial a} \overline{\Omega_s(a, b)}}{\sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(a, b) \overline{\Omega_s(a, b)}} + R_P^{(1,0)} \right).\end{gathered} \tag{34}$$

Wie eine formale Rechnung zeigt, hat dieses Minimum den Wert

$$|1 + \delta_P|^2 \left[\frac{1}{\sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(a, b) \overline{\Omega_s(a, b)}} + |R_P^{(1,0)}|^2 \begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(a, b) \overline{\Omega_s(a, b)} & \sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(a, b) \frac{\partial \overline{\Omega_s(a, b)}}{\partial a} \\ \sum_{s=1}^{s=P} \overline{\Omega_s(a, b)} \frac{\partial \Omega_s(a, b)}{\partial a} & \sum_{s=1}^{s=P} \frac{\partial \Omega_s(a, b)}{\partial a} \frac{\partial \overline{\Omega_s(a, b)}}{\partial a} \end{vmatrix} \right] \tag{35}$$

Da G_P für die vorstehende Aufgabe eine zulässige Konkurrenzfunktion ist, so folgt

$$\sum_{s=1}^{s=P} |g_s|^2 \geqq |1 + \delta_P|^2 \left[\frac{1}{\sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(a, b) \overline{\Omega_s(a, b)}} + |R_P^{(1,0)}|^2 \begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(a, b) \overline{\Omega_s(a, b)} & \sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(a, b) \frac{\partial \overline{\Omega_s(a, b)}}{\partial a} \\ \sum_{s=1}^{s=P} \frac{\partial \Omega_s(a, b)}{\partial a} \overline{\Omega_s(a, b)} & \sum_{s=1}^{s=P} \frac{\partial \Omega_s(a, b)}{\partial a} \frac{\partial \overline{\Omega_s(a, b)}}{\partial a} \end{vmatrix} \right]$$

Bei wachsendem p und P konvergieren: nach (27) und (29)

$$\sum_{s=1}^{s=P} |g_s|^2 \to \frac{1}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a, b) \overline{\Omega_s(a, b)}}, \tag{37}$$

nach (31)

$$\delta_P \to 0 \tag{38}$$

und

$$\frac{\sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}{\begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(a,b)\,\overline{\frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}} \\ \sum_{s=1}^{s=P} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=P} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}} \end{vmatrix}} \rightarrow$$

(39)

$$\rightarrow \frac{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}{\begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}} \\ \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}} \end{vmatrix}}$$

Dieser letzte Ausdruck hat einen von Null verschiedenen positiven Wert, denn der Zähler ist bestimmt positiv und der Nenner ist ebenfalls endlich und positiv. Die Existenz von $\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}}$ läßt sich ganz analog wie die Existenz von $\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}$ einsehen, in dem wir in der besprochenen (S. 650) Extremumaufgabe an Stelle der Nebenbedingung (10) verlangen, daß:

$$\frac{\partial U_p(a,b)}{\partial a} = 1 \tag{40}$$

ist. Nach dem Hilfssatz I folgt dann [der Ungleichung (14) analog]:

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}} \leqq \frac{1}{\text{konst.}\,\gamma_{ab}^6} \tag{41}$$

Da (37), (38) und (39) für jedes genügend große p und P gelten, so folgt daraus, daß

$$\lim_{P\to\infty} R_P^{(1,0)} = 0 \tag{42}$$

ist, w. z. b. w.

Genau auf dieselbe Weise läßt sich für jedes $(\nu\,\mu)$ zeigen, daß

$$\frac{\partial^{\nu+\mu} G_P(a,b)}{\partial a^\nu\,\partial b^\mu} \equiv \sum_{s=1}^{s=P} g_s \frac{\partial^{\nu+\mu} \Omega_s(a,b)}{\partial a^\nu\,\partial b^\mu} = \frac{\sum_{s=1}^{s=P} \frac{\partial^{\nu+\mu} \Omega_s(a,b)}{\partial a^\nu\,\partial b^\mu}\,\overline{\Omega_s(a,b)}}{\sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}} + R_P^{(\nu\mu)} \tag{43}$$

ist, mit

$$\lim_{P\to\infty} R_P^{(\nu\mu)} = 0. \tag{44}$$

Nach Satz II und Satz I (Punkt 1) konvergiert in der Umgebung des Punktes $a\,b$

$$\sum_{s=1}^{s=P} g_s\,\Omega_s(X,Z) \text{ gegen } G(X,Z), \tag{45}$$

$$\frac{\sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}{\sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}} \text{ gegen } U(X,Z), \tag{46}$$

Nach dem soeben Bewiesenen konvergieren ferner bei wachsenden P in der Umgebung des Punktes $a\,b$ *alle Ableitungen von* $\sum_{s=1}^{s=P} g_s\,\Omega_s(X,Z)$ *gegen die entsprechenden Ableitungen von*

$$\frac{\sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}{\sum_{s=1}^{s=P} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}. \tag{47}$$

Da $u(X,Z)$ und $G(X,Z)$ in der Umgebung des Punktes $a\,b$ regulär-analytisch sind, folgt daraus die Gleichung (28), die z. b. w.

Ist $\Omega_s(X,Z)$ ein in $\mathfrak{B}$ vollständiges Orthogonalfunktionensystem, so soll die Lösung der früher besprochenen Variationsaufgabe

$$U(X,Z) \equiv \frac{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}} \equiv \frac{K(X,Z;\overline{a,b})}{K(a,b;\overline{a,b})} \tag{48}$$

als *Minimalfunktion* (die in bezug auf $a\,b$ normiert ist) bezeichnet werden. Da man die Existenz von vollständigen Orthogonalfunktionensystemen[7]) leicht nachweisen kann, so gilt der

Satz III. *Zu jedem Bereich* $\mathfrak{B}$ *existiert eine und nur eine in* $\mathfrak{B}$ *reguläre, in bezug auf den Punkt* $a\,b$ *normierte Minimalfunktion* $w(X,Z)$, *die das Integral* (9) *zu Minimum macht, wenn zur Konkurrenz sämtliche in* $\mathfrak{B}$ *regulären Funktionen mit* $F(a,b) = 1$ *und endlichem* $\iiiint_{\mathfrak{B}} F(X,Z)\,\overline{F(X,Z)}\,d\omega_{XZ}$ *herangezogen werden.*

[7]) Vgl. dazu die Arbeit: „Zwei Sätze über Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen", Math. Annalen **100** (1928), S. 399—410.

Bevor zu weiteren Überlegungen übergegangen wird, sei noch auf einige interessante Einzelheiten näher eingegangen.

Sei $\mathfrak{G}$ ein einfach zusammenhängender Bereich des P_4 [8]), der den Nullpunkt in seinem Innern enthält und seinerseits sich im Innern der vierdimensionalen Hyperkugel vom Radius $\frac{1}{2}[\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\eta^2 \leqq \frac{1}{4}]$ befindet und in dem das Funktionensystem

$$X^\nu Z^\mu \quad [(\nu\mu)=(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),\ldots] \tag{49}$$

vollständig ist. Bildet man mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens aus (49) die Orthogonalpolynome

$$p_s(X,Z), \tag{50}$$

so können wir die Sätze II und III auf das System $p_s(X,Z)$ anwenden und erhalten dann die entsprechenden Behauptungen.

Es liegt nahe, unsere Betrachtungen mit der Theorie der vollstetigen Hermiteschen Formen

$$f(\alpha_{\nu\mu},\overline{\alpha_{\nu'\mu'}}) \equiv \sum_{(\nu\mu),(\nu'\mu')=1}^{(\nu\mu),(\nu'\mu')=\infty} \alpha_{\nu\mu}\,\overline{\alpha}_{\nu'\mu'} \iiint_{\mathfrak{G}} X^\nu Z^\mu \overline{X^{\nu'} Z^{\mu'}}\, d\omega_{XZ} \tag{51}$$

in Zusammenhang zu bringen. (Wir machen dabei die unwesentliche Voraussetzung, daß der Punkt a,b Koordinatenanfangspunkt ist, d. h.: $a,b=0,0$).

Wir wollen zunächst zeigen, daß (51) vollstetig und positiv-definit ist. Sei $F(X,Z)$ eine im abgeschlossenen $\mathfrak{G}$ konvergierende Potenzreihe

$$\sum_{(m\,n)=0}^{(m\,n)=\infty} \alpha_{m\,n} X^m Z^n$$

---

[8]) Unter einfach zusammenhängendem Bereich wird hier stets ein zusammenhängender Bereich verstanden, in dem jede ein-, zwei- oder dreidimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit, die ganz in dessen Innern liegt, sich in dem Bereich stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

Es ist leicht, Bereiche zu konstruieren, in denen $p_s(X,Z)$ vollständig ist.

Zum Beispiel: Liege B in der Ebene: $X=0$, B' in der Ebene: $Z=0$. Seien ferner C und C' die Berandungen von B und B'. Es sei schließlich ein Bereich $\mathfrak{R}$ des P_4 derart beschaffen, daß

1. $\mathfrak{R}$ im Innern des Produktbereiches $B \times B'$ liegt, und

2. daß die Produktfläche $C \times C'$ sich ganz auf der Berandung von $\mathfrak{R}$ befindet. Es folgt dann nach einem Hartogsschen Satz, daß man jede in $\mathfrak{R}$ reguläre Funktion in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ gelegenen Teilbereiche durch ein Polynom $\sum_{(\nu\mu)=0}^{(\nu\mu)=(n\,m)} a_{\nu\mu} X^\nu Z^\mu$ approximieren kann.

Vgl. dazu F. Hartogs, „Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen", Sitzungsberichte der Kön. Akademie der Wissensch. zu München **34** (1906), S. 223—242, insbes. § 1.

und $F_p(X, Z)$ ihr Abschnitt

$$\sum_{(mn)=0}^{(mn)=p}{}' \alpha_{mn} X^m Z^n.$$

Wir bilden nun den Ausdruck

$$f^*(\alpha_{\nu\mu}, \overline{\alpha_{\nu'\mu'}}) \equiv \iiiint_{\mathfrak{B}} F(X, Z)\, \overline{F(X, Z)}\, d\omega_{XZ}. \tag{52}$$

Setzt man in f^* an Stelle von $F(X, Z)$ den Abschnitt $F_p(X, Z)$ ein, so erhält man offenbar in (2) den entsprechenden Abschnitt von f^*, den wir mit f_p^* bezeichnen. f_p^* läßt sich auch in der Form schreiben:

$$\sum_{(\nu\mu),(\nu'\mu')=1}^{(\nu\mu),(\nu'\mu')=p}{}' \alpha_{\nu\mu}\, \overline{\alpha_{\nu'\mu'}}\, A_{\nu\mu\nu'\mu'} \qquad (A_{\nu\mu\nu'\mu'} \equiv \iiiint_{\mathfrak{B}} X^\nu Z^\mu \overline{X^{\nu'} Z^{\mu'}}\, d\omega_{XZ}).$$

Für die Koeffizienten von f_p^* gilt eine wichtige Abschätzung:

$$|A_{\nu\mu\nu'\mu'}| \leqq 4\pi^2 R_1^{\nu+\nu'+\mu+\mu'+4} \qquad (|R_1| < 1), \tag{53}$$

wie wir beweisen werden.

Es ist klar, daß man jedes einfach zusammenhängende Gebiet des P_4 als Produkt von zwei Gebieten des P_2 darstellen kann, von denen das eine, B_1, für alle Z unverändert bleibt und das zweite, B_2, eine Funktion von X ist. (Symbolisch können wir diesen Tatbestand in der Form

$$\mathfrak{G} = B_1 \times B_2(X)$$

aufschreiben.) In unserem Falle wird sowohl B_1 wie $B_2(X)$ im Innern des Einheitskreises des P_2 liegen.

Führen wir durch die Transformation

$$\xi = R\cos\varphi, \qquad \eta = R\sin\varphi, \qquad \zeta = \varrho\cos\theta, \qquad \tau = \varrho\sin\theta$$

neue Koordinaten $R, \varrho, \varphi, \theta$ ein, so ist

$$A_{\nu\mu\nu'\mu'} = \int_0^{R_1}\int_0^{h(R)}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R^{\nu+\mu}\, \varrho^{\nu'+\mu'}\, e^{i(\nu-\nu')\varphi}\, e^{i(\mu-\mu')\theta}\, R\varrho\, dR\, d\varrho\, d\varphi\, d\theta,$$

wobei R_1 und R_2 [= Maximum von $h(X)$] die größten Entfernungen von B_1 und $B_2(X)$ vom Nullpunkte sind. R_1 sei größer als R_2. R_1 ist kleiner als eins. Wir können nunmehr auf die Beziehung (53) schließen und ferner, daß

$$\sum_{(\nu\mu),(\nu'\mu')=1}^{(\nu\mu),(\nu'\mu')=\infty}{}' |A_{\nu\mu\nu'\mu'}| \leqq \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 R_1^n.$$

Da $R_1 < 1$, so existiert $\lim\limits_{p\to\infty} f_p^*$, und $f^*(\alpha_{\nu\mu}, \overline{\alpha_{\nu'\mu'}}) = \lim\limits_{p\to\infty} f_p^*$ ist vollstetig. Hieraus folgt weiter, daß man in (52) die rechte Seite gliedweise integrieren kann, da F in der Einheitskugel des P_4 regulär ist. Daher ist auch $f(\alpha_{\nu\mu}, \overline{\alpha_{\nu'\mu'}})$ positiv-definit; denn sowohl $F(X, Z)\, \overline{F(X, Z)}$ als auch

$d\omega_{XZ}$ sind nicht negativ und das Integral (52) ist nur dann gleich Null, wenn $F(X, Z)$ identisch verschwindet.

Nach Hilbert[9]) läßt sich nun f in der Form

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} K_s \left(\sum_{(\nu\mu)=1}^{(\nu\mu)=\infty} O_{s,\nu\mu}\, \alpha_{\nu\mu} \right) \overline{\left(\sum_{(\nu\mu)=1}^{(\nu\mu)=\infty} O_{s,\nu\mu}\, \alpha_{\nu\mu} \right)} \qquad s = (\nu\mu)$$

schreiben. Definieren wir ähnlich, wie es in der Arbeit I geschah, als Orthogonalfunktionen die Ausdrücke

$$\varphi_s \equiv \frac{1}{\sqrt{K_s}} \sum_{(\nu\mu)=1}^{(\nu\mu)=\infty} O_{s,\nu\mu}\, X^\nu Z^\mu,$$

so erhalten wir in φ_s eine unendliche Folge von Funktionen, die überall in der Einheitskugel des P_4 regulär sind und die gewisse interessante Eigenschaften besitzen, auf die in der in der Fußnote [7]) angegebenen Arbeit näher eingegangen wurde.

Die früher besprochene Variationsaufgabe ist mit der Frage nach dem Minimum von (51) bei der Nebenbedingung

$$\alpha_{00} = 1$$

identisch. Wie man leicht zeigen kann, ist das Wertsystem β_s, welches die Minimalaufgabe löst:

$$\beta_s = \frac{\sum_{(\nu\mu)=1}^{(\nu\mu)=\infty} \frac{O_{1,\nu\mu}\, \overline{O_{s,\nu\mu}}}{K_{\nu\mu}}}{\sum_{(\nu\mu)=1}^{(\nu\mu)=\infty} \frac{O_{1,\nu\mu}\, \overline{O_{1,\nu\mu}}}{K_{\nu\mu}}}.$$

Betreffs des Beweises dieser letzten Formel sei auf den § 2 der Arbeit I hingewiesen.

Ein weiteres bemerkenswertes Orthogonalfunktionensystem ψ_s, das zu dem Bereich $\mathfrak{B}$ gehört, erhält man unter der Voraussetzung, daß es ein Funktionenpaar $V(X, Z)$, $W(X, Z)$ gibt, welches $\mathfrak{B}$ auf einen Kreisbereich $\mathfrak{K}$ abbildet. Setzen wir

$$\psi_1 \equiv \frac{\partial[V, W]}{\partial[X, Z]},\ \psi_2 \equiv V \frac{\partial[V, W]}{\partial[X, Z]},\ \psi_3 \equiv W \frac{\partial[V, W]}{\partial[X, Z]},\ \psi_4 \equiv V^2 \frac{\partial[V, W]}{\partial[X, Z]},\ \ldots,$$

so erhalten wir in ψ_ν ein Funktionensystem, das im Sinne der Beziehung (2) in $\mathfrak{B}$ orthogonal ist; denn es gilt:

[9]) Vgl. Hilbert, Grundzüge der allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Teubner 1912, 4. Mitteilung, Satz 39.

$$\int\int\int\int\int_{\mathfrak{B}} \psi_s \overline{\psi}_p \, d\omega_{XZ} = \int\int\int\int\int_{\mathfrak{B}} V^\nu W^\mu \frac{\partial[V,W]}{\partial[X,Z]} \overline{V^{\nu'} W^{\mu'} \frac{\partial[V,W]}{\partial[X,Z]}} \, d\omega_{XZ}$$

$$= \int\int\int\int\int_{\mathfrak{R}} V^\nu W^\mu \overline{V^{\nu'} W^{\mu'}} \, d\omega_{VW}$$

$$= \int_0^{R_1} \int_0^{g(R)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R^{\nu+\nu'+1} \varrho^{\mu+\mu'+1} e^{i[\varphi(\nu-\nu')+\theta(\mu-\mu')]} \, dR \, d\varrho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= 4\pi^2 \int_0^{R_1} \frac{R^{2\nu+1} g^{2\mu+2}(R)}{2\mu+2} \, dR, \quad \text{falls} \quad (\nu\mu) = (\nu'\mu'),$$

$$= 0, \qquad \text{„} \qquad (\nu\mu) \neq (\nu'\mu').$$

Wir wollen nunmehr noch eine wichtige Eigenschaft unseres Funktionensystems feststellen, und zwar wollen wir zunächst zeigen, daß

$$\int\int\int\int\int_{\mathfrak{B}} X^\nu Z^\mu \overline{\psi}_s \, d\omega_{XZ} = 0, \tag{54}$$

falls $(\nu\mu) > s$ ist.

Um dies einzusehen, verpflanzen wir $X^\nu Z^\mu$ in den (V, W)-Raum. $X^\nu Z^\mu$ ist eine in $\mathfrak{R}$ reguläre Funktion, die sich nach dem Hartogsschen Satz [vgl. Fußbemerkung [6]), S. 650] in $\mathfrak{R}$ in eine Potenzreihe entwickeln läßt. Aus der Voraussetzung (4) der Einleitung folgt, daß $V^\nu W^\mu$ die niedrigste in ihr auftretende Potenz von V, W ist. $\frac{1}{\left[\frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)}\right]}$ ist eine in $\mathfrak{R}$ reguläre Funktion; denn infolge der Eineindeutigkeit der Abbildung ist $\frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)}$ in $\mathfrak{B}$ [somit in $\mathfrak{R}$] regulär und nirgends Null. $\frac{X^\nu Z^\mu}{\left[\frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)}\right]}$ ist somit in $\mathfrak{R}$ regulär und läßt sich (nach dem Hartogsschen Satz) in $\mathfrak{R}$ in eine Potenzreihe entwickeln, deren niedrigste Potenz $V^\nu W^\mu$ ist. Das Integral in (54) ist somit

$$\int\int\int\int\int_{\mathfrak{B}} \frac{X^\nu Z^\mu}{\left[\frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)}\right]} \frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)} \overline{V^{\nu_s} W^{\mu_s} \frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)}} \, d\omega_{XZ}$$

$$((\nu_s \mu_s) = s)$$

$$= \int\int\int\int\int_{\mathfrak{R}} \frac{X^\nu Z^\mu}{\left[\frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)}\right]} \overline{V^{\nu_s} W^{\mu_s}} \, d\omega_{VW} = \int\int\int\int\int_{\mathfrak{R}} [V^\nu W^\mu + \ldots] \overline{V^{\nu_s} W^{\mu_s}} \, d\omega_{VW}$$

gleich und dies ist Null.

Wir wollen nunmehr die oben eingeführte Funktion $F(X, Z)$ nach dem System ψ_s entwickeln, was auf Grund des Satzes II und der Regularität von $\frac{F(X,Z)}{\left[\frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)}\right]}$ möglich ist. Es ist:

$$(55) \qquad F(X,Z) = \frac{F(X,Z)}{\left[\frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)}\right]} \left[\frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)}\right]$$

$$= \sum_{\varphi=\infty}^{s=\infty} \psi_s(X,Z) \iiiint_{\mathfrak{B}} F(X,Z)\, \overline{\psi_s(X,Z)}\, d\omega_{XZ}.$$

F ist definitionsgemäß gleich $\sum_{(\nu\mu)=0}^{(\nu\mu)=\infty} \alpha_{\nu\mu} X^\nu Z^\mu$ und der Fourierkoeffizient der Reihe (55) gleich

$$\iiiint_{\mathfrak{B}} F(X,Z)\overline{\psi_s(X,Z)}\, d\omega_{XZ} = \sum_{(\nu\mu)=0}^{(\nu\mu)=\infty} \alpha_{\nu\mu} \iiiint_{\mathfrak{B}} X^\nu Z^\mu\, \overline{\psi_s(X,Z)}\, d\omega_{XZ}.$$

Auf Grund der früher bewiesenen Eigenschaft (54) des Systems ψ_s folgt, daß dieser Koeffizient weiter gleich

$$\sum_{(\nu\mu)=0}^{(\nu\mu)=s} \alpha_{\nu\mu} \iiiint_{\mathfrak{B}} X^\nu Z^\mu\, \overline{\psi_s(X,Z)}\, d\omega_{XZ}.$$

ist. Der n-te Fourierkoeffizient ist somit nur von den n ersten Veränderlichen $\alpha_{\nu\mu}$ abhängig.

Ein Funktionenpaar $V(X, Z)$, $W(X, Z)$ heiße in bezug auf den Punkt $0, 0$ [vgl. Einleitung (4)] normiert, falls

$$V(0,0) = 0 \left(\frac{\partial V(X,Z)}{\partial X}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} = 1, \qquad \left(\frac{\partial V(X,Z)}{\partial Z}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} = 0,$$

$$W(0,0) = 0 \left(\frac{\partial W(X,Z)}{\partial X}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} = 0, \qquad \left(\frac{\partial W(X,Z)}{\partial Z}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} = 1$$

ist. Sei $\mathfrak{B}$ wieder der früher definierte Bereich, wobei der Koordinatenanfangspunkt ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ ist. Ist das normierte Paar V, W in $\mathfrak{B}$ regulär, so bildet es den Bereich $\mathfrak{B}$ auf einen neuen Bereich $\mathfrak{D}$ des VW-Raumes ab.

Das (vierdimensionale) *Volumen* von $\mathfrak{D}$, das durch

$$\iiiint_{\mathfrak{D}} d\omega_{VW} = \iiiint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)} \frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)}\, d\omega_{XZ}$$

gegeben ist, kann im allgemeinen größer, gleich oder kleiner als das Volumen von $\mathfrak{B}$ sein. Als *Minimalbereich* soll jeder Bereich $\mathfrak{Z}$ bezeichnet werden, der durch ein normiertes Funktionenpaar V, W nicht auf einen Bereich von kleineren Volumen wie $\mathfrak{Z}$ abgebildet werden kann. Da man zu der Funktionaldeterminante

$$\left|\frac{\partial(V, W)}{\partial(X, Z)}\right| = 1 \tag{56}$$

im allgemeinen eine kontinuierlich-unendliche Schar von in $\mathfrak{Z}$ regulären Funktionenpaaren V, W herstellen kann, so müssen wir von Klassen von (volumentreuen) Minimalbereichen sprechen. Jeder Minimalbereich wird durch ein Funktionenpaar V, W mit der Funktionaldeterminante $\left|\frac{\partial(V, W)}{\partial(X, Z)}\right| = 1$ in einen anderen Minimalbereich derselben Klasse übergeführt.

Aus unseren früheren Überlegungen folgt nun der

Satz IV. *Jeder Bereich $\mathfrak{B}$ läßt sich auf einen Minimalbereich abbilden. Die Gesamtheit der Minimalbereiche wird dadurch erzeugt, daß man einen unter ihnen mit Hilfe von volumentreuen Abbildungen auf neue Bereiche abbildet. Die Funktionaldeterminante $\frac{\partial[V, W]}{\partial[X, Z]}$ des (in bezug auf den Punkt a, b normierten) Funktionenpaares V, W, das $\mathfrak{B}$ auf einen beliebigen Minimalbereich $\mathfrak{Z}$ abbildet, ist dem Ausdruck* (18) *gleich. Läßt sich $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{R}$ abbilden, so ist $\mathfrak{R}$ natürlich auch ein zu $\mathfrak{B}$ gehöriger Minimalbereich.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem Satz II. Wir brauchen uns nur vergegenwärtigen, daß man

1. durch wiederholte Abbildung mittels zweier normierter Funktionenpaare $V(X, Z), W(X, Z)$ und $X(X^*, Z^*), Z(X^*, Z^*)$ wieder zu einer Abbildung durch ein normiertes Funktionenpaar $V^*(X^*, Z^*)$, $W^*(X^*, Z^*)$ gelangt.

2. daß man zu jeder in $\mathfrak{B}$ regulären Funktion $D(X, Z)$ [mit $D(0, 0) = 1$] ein normiertes, in $\mathfrak{B}$ reguläres Funktionenpaar $V(X, Z), W(X, Z)$ herstellen kann, dessen Funktionaldeterminante $D(X, Z)$ ist [dies kann z. B. durch das Paar $V = \int_0^X D(\Xi, Z)\, d\Xi$, $W = Z$ geschehen].

§ 2.

Wie im § 1 hervorgehoben ist, unterscheiden sich die Verhältnisse des P_2 und P_4 in mancher Hinsicht ganz beträchtlich:

Im P_2 gibt es zu jedem Gebiet B nur ein Minimalgebiet; ist B einfach zusammenhängend, so ist das Minimalgebiet das Innere eines Kreises, der durch eine Invariante (seine Fläche) eindeutig festgelegt ist. Es ist deshalb in diesem Falle $\mathsf{K}(a, \bar{a})$ ein vollständiges Invariantensystem, mit Hilfe dessen man über die Möglichkeit der Abbildung vermittels einer normierten Funktion $W(Z)$ $[W(a) = 0, W'(a) = 1]$ eines Gebietes auf das andere entscheiden kann. Wie wir gesehen haben, gibt es in P_4 stets Klassen von Minimalbereichen, durch volumentreue Abbildungen werden die Bereiche, die zu derselben Klasse gehören, ineinander übergeführt. Auch wenn der Bereich $\mathfrak{B}$ sich auf einen Kreisbereich abbilden läßt, ist die Gestalt des Kreisbereiches durch Angabe der invarianten Zahl $\mathsf{K}(a, b; \overline{a, b})$ keineswegs bestimmt.

Wir werden deswegen durch weitere Ausbildung der in dem § 1 befolgten Methoden, eine weitere Folge zu jedem Bereich $\mathfrak{B}$ zugehöriger Zahlen aufstellen, die invariant gegenüber einer Abbildung durch ein normiertes Funktionenpaar sind, und im Falle, daß $\mathfrak{B}$ sich auf einen Kreisbereich abbilden läßt, diesen eindeutig bestimmen.

$\mathfrak{G}$ soll einen Bereich bedeuten, der

1. ganz im Innern der Einheitshyperkugel liegt,

2. aus einen Kreisbereich $\mathfrak{K}$ (dessen Randmannigfaltigkeit durch eine Gleichung von der Form

$$|W| = g(|V|) \qquad (0 \leqq V \leqq R_1) \tag{57}$$

gegeben ist) vermittels eines normierten Funktionenpaares

$$\begin{aligned} X &= V + a_{20} V^2 + a_{11} V W + a_{02} W^2 + a_{30} V^3 + a_{21} V^2 W \\ &\quad + a_{12} V W^2 + a_{03} W^3 + \ldots, \\ Z &= W + b_{20} V^2 + b_{11} V W + b_{02} W^2 + b_{30} V^3 + b_{21} V^2 W \\ &\quad + b_{12} V W^2 + b_{03} W^3 + \ldots . \end{aligned} \tag{58}$$

entsteht,

3. die Eigenschaft hat, daß das System

$$X^\nu Z^\mu \quad [(\nu\mu) = (0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), \ldots] \tag{59}$$

in ihm vollständig ist.

(Wir machen wieder — einfachheitshalber — die unwesentliche Voraus-

setzung, daß der Punkt $a\,b$ der Koordinatenanfangspunkt ist. Er soll ein innerer Punkt von $\mathfrak{G}$ sein.)

Wir betrachten den Ausdruck

$$\int\int_{\mathfrak{G}}\int\int F^*(X,Z)\,\overline{F^*(X,Z)}\,d\omega_{XZ}, \tag{60}$$

wo $F^*(X,Z)$ eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion mit endlichen Integral (60) ist. Das Funktionselement von $F^*(X,Z)$ sei

$$\sum_{(\nu\mu)=1}^{(\nu\mu)=\infty} \alpha^*_{\nu\mu}\,X^\nu\,Z^\mu. \tag{61}$$

Läßt man zur Konkurrenz alle in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen mit endlichen Volumenintegral, deren Funktionselement mit dem Ausdruck

$$\sum_{(\nu\mu)=1}^{(\nu\mu)=(nm)} \alpha_{\nu\mu}\,X^\nu\,Z^\mu \tag{62}$$

beginnt, zu, und sucht man dann das Minimum von (60), so existiert — wie wir zeigen werden — eine und nur eine Funktion, die an Stelle von F^* in (60) eingesetzt das Integral zu einem Minimum macht. Diese Funktion soll mit $u_{nm}(X,Z)$ bezeichnet werden und $\int\int_{\mathfrak{G}}\int\int u_{nm}(X,Z)\,\overline{u}_{nm}(X,Z)\,d\omega_{XZ}$ mit L_{nm}. L_{nm} ist offenbar eine reelle Funktion $(n\,m)$ Veränderlicher $\alpha_{00}, \alpha_{10}, \alpha_{01}, \ldots, \alpha_{nm}$ und ihrer Konjugierten.

Bildet man andererseits die unendliche Hermitesche Form

$$f(\alpha^*_{\nu\mu}, \overline{\alpha^*_{\nu'\mu'}}) \equiv \sum_{\substack{(\nu\mu)=1\\(\nu'\mu')=1}}^{\infty} \alpha^*_{\nu\mu}\,\overline{\alpha^*_{\nu'\mu'}} \int\int_{\mathfrak{G}}\int\int X^\nu\,Z^\mu\,\overline{X^{\nu'}\,Z^{\mu'}}\,d\omega_{XZ} \tag{63}$$

und bezeichnet man mit $f_p(\alpha^*_{\nu\mu}, \overline{\alpha^*_{\nu'\mu'}})$ ihren p-ten Abschnitt, so kann man das Minimum von $f_p(\alpha^*_{\nu\mu}, \overline{\alpha^*_{\nu'\mu'}})$ bei den Nebenbedingungen

$$\alpha^*_{00} = \alpha_{00},\ \alpha^*_{10} = \alpha_{10},\ \alpha^*_{01} = \alpha_{01},\ \ldots,\ \alpha^*_{nm} = \alpha_{nm} \tag{64}$$

suchen. Bezeichnet man dieses Minimum mit $J^{(p)}_{nm}$, so ist $J^{(p)}_{nm}$ ebenfalls eine reelle Funktion der $(n\,m)$ Veränderlicher $\alpha_{00}, \alpha_{10}, \ldots, \alpha_{nm}$ und deren Konjugierten. Es existiert offenbar $J_{nm} = \operatorname*{limes}_{p\to\infty} J^{(p)}_{nm}$. *Wir wollen zeigen, daß*

$$L_{nm} = J_{nm} \tag{65}$$

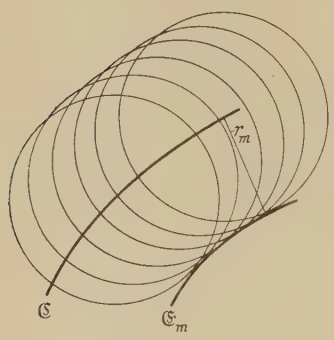
ist.

Der Beweis zerfällt in zwei Teile:

I. Wir führen zuerst den Existenzbeweis von L_{nm} und beginnen mit einen einfachen

Hilfssatz. Seien die Berandungen zweier Bereiche $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ stückweise analytische doppelpunktlose dreidimensionale Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ mit sich stetig drehendem Tangentialraum. Das Innere von $\mathfrak{B}$ soll eineindeutig und stetig auf das Innere von $\mathfrak{B}'$ abgebildet sein. $\mathfrak{C}_n$ $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ bedeute eine unendliche Folge von dreidimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeiten, die ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegen sind, $\mathfrak{C}'_n$ — ihre Bilder in $\mathfrak{B}'$. Konvergiert nun mit wachsendem n die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{C}_n$ gegen $\mathfrak{C}$, so konvergiert $\mathfrak{C}'_n$ gegen $\mathfrak{C}'$.

Beweis. Es läßt sich zu jedem Punkt von $\mathfrak{C}$ eine Oskulationshyperkugel legen. Die Radien dieser Hyperkugeln haben ein von Null verschiedenes Minimum, das wir mit $r^{(0)}$ bezeichnen. Legen wir um jeden Punkt von $\mathfrak{C}$ eine Hyperkugel vom Radius $r_m < r^{(0)}$, so wird die innere Enveloppe $\mathfrak{E}_m$ dieser Kugeln eine stückweise reguläre dreidimensionale Mannigfaltigkeit sein, die folgende Eigenschaften besitzt:



1. sie hat keine Doppelpunkte,

2. die in der Fußnote [5]) definierte maximale und minimale Entfernung $\mathfrak{E}_m$ von $\mathfrak{C}$ ist: $\varrho^{(m)}_{\max} = \varrho^{(m)}_{\min} = r_m$. Die Bilder von $\mathfrak{E}_m$ in $\mathfrak{B}'$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}'_m$; die maximale und minimale Entfernung $\mathfrak{E}'_m$ von $\mathfrak{C}'$ sei $\varrho'^{(m)}_{\max}$ und $\varrho'^{(m)}_{\min}$. Wir werden zeigen, daß:

$$\text{I. für } r_m > 0, \text{ ist } \varrho'^{(m)}_{\max} \geqq \varrho'^{(m)}_{\min} > 0,$$

$$\text{II. aus } \varrho'^{(m)}_{\min} = 0 \text{ folgt } \varrho'^{(m)}_{\max} = 0 \text{ und } r_m = 0.$$

Denn sei E' ein Punkt von $\mathfrak{E}'_m$, für den $\varrho'^{(m)}_{\min} = 0$ ist. Da $\mathfrak{E}'_m$ sich eineindeutig auf $\mathfrak{E}_m$ abbilden läßt, so entspricht E' ein Punkt E von $\mathfrak{E}_m$, der ebenfalls auf $\mathfrak{C}$ liegt. Nach 2. folgt aber, daß $\mathfrak{E}_m$ mit $\mathfrak{C}$ identisch ist, d. h. $r_m = 0$ ist. Nach dem mit Hilfe von $\mathfrak{E}$ (bzw. $\mathfrak{E}'$) die Schichtung des Randteiles von $\mathfrak{B}$ (bzw. $\mathfrak{B}'$) vorgenommen ist, ist es leicht, den Hilfssatz zu erschließen.

Es ist nun leicht einzusehen, daß für jede in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion F mit endlichem $\int\int_{\mathfrak{G}}\int\int F(X, Z)\, \overline{F(X, Z)}\, d\omega_{XZ}$:

$$\iint\limits_{(\mathfrak{G})}\iint F(X,Z)\,\overline{F(X,Z)}\,d\omega_{XZ}$$

$$=\iint\limits_{\mathfrak{K}}\iint F[X(V,W),Z(V,W)]\,\frac{\partial(X,Z)}{\partial(V,W)}\,\overline{F[X(V,W),Z(V,W)]}\,\frac{\partial(X,\overline{Z})}{\partial(V,\overline{W})}\,d\omega_{VW}.$$

gilt. Denn wir können $\mathfrak{G}$ in zwei Teile zerspalten: in einen ganz im Innern von $\mathfrak{G}$ gelegenen Teilbereich $\mathfrak{G}_n$ und in $(\mathfrak{G}-\mathfrak{G}_n)$ derart, daß

$$\iint\limits_{(\mathfrak{G}-\mathfrak{G}_n)}\iint F(X,Z)\,\overline{F(X,Z)}\,d\omega_{XZ}\leqq\varepsilon \tag{67}$$

ist, wobei ε eine vorgegebene beliebig kleine Zahl ist. Dem Bereich $\mathfrak{G}_n$ entspricht ein ganz im Innern von $\mathfrak{K}$ gelegener Teilbereich $\mathfrak{K}_n$. Wie oben bewiesen wurde, folgt aus $\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{G}_n=\mathfrak{G}$ auch $\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{K}_n=\mathfrak{K}$. F und $\frac{\partial(X,Z)}{\partial(V,W)}$ sind im abgeschlossenen $\mathfrak{K}_n$ regulär. Es ist also

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}_n}\iint F(X,Z)\,\overline{F(X,Z)}\,d\omega_{XZ}$$

$$=\iint\limits_{\mathfrak{K}_n}\iint F[X(V,W),Z(V,W)]\,\frac{\partial(X,Z)}{\partial(V,W)}\,\overline{F[X(V,W),Z(V,W)]}\,\frac{\partial(X,\overline{Z})}{\partial(V,\overline{W})}\,d\omega_{VW}.$$

Da die Gleichung (68) für jedes $\mathfrak{G}_n$ gilt, so gilt — auf Grund unserer Definition des Integrals — die Formel (66), w. z. b. w.

Wählen wir für den Ausdruck

$$u_{nm}[X(V,W),Z(V,W)]\,\frac{\partial(X,Z)}{\partial(V,W)}$$

das Polynom

$$\begin{aligned}
&\alpha_{00}+\\
+[&\alpha_{00}(b_{11}+2a_{20})+\alpha_{10}]V+\\
+[&\alpha_{00}(2b_{02}+a_{11})+\alpha_{01}]W+\\
+[&\alpha_{00}(3a_{30}+b_{21}+2a_{20}b_{11}-2a_{11}b_{20})+\alpha_{10}(b_{11}+3a_{20})+\alpha_{01}b_{20}+\alpha_{20}]V^2+\\
+[&\alpha_{00}(4a_{20}b_{02}-4a_{02}b_{20}+2a_{21}+2b_{12})+\alpha_{10}(2b_{02}+2a_{11})+\alpha_{01}(2b_{11}+2a_{20})+\alpha_{11}]VW+\\
+[&\alpha_{00}(3b_{03}+a_{12}+2a_{11}b_{02}-2a_{02}b_{11})+\alpha_{10}a_{02}+\alpha_{01}(3b_{02}+a_{11})+\alpha_{02}]W^2+\\
+&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\
+[&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_{nm}]V^nW
\end{aligned}$$

so wird $u_{nm}(X,Z)$

1. in $\mathfrak{K}$, somit auch in $\mathfrak{G}$ regulär;

2. wird das Funktionselement von $u_{nm}(X,Z)$ um den Nullpunkt — wie eine formale Rechnung zeigt — mit dem Polynom (62) beginnen.

3. Es ist

$$(70)\qquad \iint\limits_{\mathfrak{B}}\iint u_{nm}(X,Z)\,\overline{u_{nm}(X,Z)}\,d\omega_{XZ}=\iint\limits_{\mathfrak{R}}\iint u_{nm}[X(V,W),Z(V,W)]$$

$$=4\pi^2\Big\{|\alpha_{00}|^2\int_0^{R_1}\frac{R\,g^2(R)}{2}\,dR$$

$$+|\alpha_{00}(b_{11}+2a_{20})\qquad +\alpha_{10}|^2\int_0^{R_1}\frac{R^3 g^2(R)}{2}\,dR$$

$$+|\alpha_{00}(2b_{02}+a_{11})$$

$$+|\alpha_{00}(3a_{30}+b_{21}+2a_{20}b_{11}-2a_{11}b_{20})\qquad +\alpha_{10}(b_{11}+3a_{20})$$

$$+|\alpha_{00}(4a_{20}b_{02}-4a_{02}b_{20}+2a_{21}+2b_{12})\qquad +\alpha_{10}(2b_{02}+2a_{11})$$

$$+|\alpha_{00}(3b_{03}+a_{12}+2a_{11}b_{02}-2a_{02}b_{11})\qquad +\alpha_{10}a_{02}$$

$$+|\alpha_{00}(b_{22}+4a_{40}+2a_{20}b_{21}+2a_{21}b_{20}+3a_{30}b_{11}-3a_{11}b_{30})+\alpha_{10}(4a_{30}+3a_{20}b_{11}+b_{21}+2a_{20}^2-2$$

$$+|\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

denn

$$\iint\limits_{\mathfrak{R}}\iint V^{\nu}W^{\mu}\,\overline{V^{\nu'}W^{\mu'}}\,d\omega_{VW}\begin{cases}=4\pi^2\displaystyle\int_0^{R_1}\frac{R^{2\nu+1}g^{2\mu+2}(R)}{2\mu+2}\,dR, & \text{falls } (\nu\mu)=(\nu'\mu'),\\ =\qquad 0 \qquad\qquad , & \text{falls } (\nu\mu)\neq(\nu'\mu').\end{cases}$$

Die Funktion u_{nm} ist somit eine zulässige Konkurrenzfunktion. Wir wollen nun zeigen, daß jede andere Konkurrenzfunktion $h(X,Z)$ dem Integral

$$\iint\limits_{\mathfrak{B}}\iint h(X,Z)\,\overline{h(X,Z)}\,d\omega_{XZ}$$

einen größeren Wert als (70) erteilt.

Infolge der Forderung, daß das Funktionselement mit dem Polynom (62) beginnt, wird — wie eine formale Rechnung zeigt —

$$\overline{Z(V,W),\,Z(V,W)]}\,\frac{\partial(X,Z)}{\partial(V,W)}\cdot d\omega_{VW}$$

$$|^2\int_0^{R_1}\frac{Rg^4(R)}{4}\,dR$$

$$b_{20}\qquad +\alpha_{20}|^2\int_0^{R_1}\frac{R^5g^2(R)}{2}\,dR$$

$$(2b_{11}+2a_{20})\qquad +\alpha_{11}|^2\int_0^{R_1}\frac{R^3g^4(R)}{4}\,dR$$

$$(3b_{02}+a_{11})\qquad +\alpha_{02}|^2\int_0^{R_1}\frac{Rg^6(R)}{6}\,dR$$

$$+\alpha_{20}(4a_{20}+b_{11})+\alpha_{11}b_{20}\qquad +\alpha_{30}|^2\int_0^{R_1}\frac{R^7g^2(R)}{2}\,dR+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad +\alpha_{nm}|^2\int_0^{R_1}\frac{R^{n+1}g^{m+2}(R)}{m+2}\,dR\Big\},$$

$$\iiiint_{\mathfrak{G}} h(X,Z)\,\overline{h(X,Z)}\,d\omega_{XZ}$$

$$=\iiiint_{\mathfrak{R}} h[X(V,W),Z(V,W)]\,\frac{\partial(X,Z)}{\partial(V,W)}\,\overline{h[X(V,W),Z(V,W)]}\,\overline{\frac{\partial(X,Z)}{\partial(V,W)}}\,d\omega_{VW}$$

mit dem Ausdruck (70) beginnen, zu dem nur noch positive Glieder von der Form

$$(72)\qquad \int_0^{R_1}\frac{R^{\nu+1}g^{\mu+2}(R)}{\mu+2}\,dR\,|\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_{\nu\mu}|^2\qquad(\nu\,\mu)>(n\,m)$$

kommen. (71) wird somit gleich oder größer als (70) sein. Der Ausdruck (70) stellt somit die gesuchte Funktion L_{nm} dar.

II. Wir wollen nunmehr die Gleichung (65) beweisen.

Es ist jedenfalls

$$L_{nm} \leqq J_{nm}, \tag{73}$$

denn jedes Polynom, das [infolge der Nebenbedingung (64)] mit (62) beginnt, stellt eine zulässige Konkurrenzfunktion dar.

Andererseits folgt aus der Vollständigkeitsrelation (Punkt 2 S. 652), daß bei genügend großen $(p\,q)$

$$\iiint_{\mathfrak{G}} u_{nm}(X,Z)\,\overline{u_{nm}(X,Z)}\,d\omega_{XZ} - \sum_{s=1}^{s=(p\,q)} \Big|\iiint_{\mathfrak{G}} u_{nm}(X,Z)\,\overline{p_s(X,Z)}\,d\omega_{XZ}\Big|^2 < \varepsilon \tag{74}$$

wird, wobei die $p_s(X,Z)$ die durch (30) definierten Orthogonalpolynome sind und ε eine vorgegebene kleine Zahl ist.

Aus dem Hilfssatz I (vgl. S. 649) folgt, daß

$$\left|\left(\frac{1}{\nu!\,\mu!}\right)\left(\frac{\partial^{\nu+\mu} H(X,Z)}{\partial X^{\nu}\,\partial Z^{\mu}}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}}\right| \leqq \frac{\sqrt{\iiint_{\mathfrak{G}} H(X,Z)\,\overline{H(X,Z)}\,d\omega_{XZ}}}{\text{konst.}\cdot \gamma_{00}^{\nu+\mu+2}} \tag{75}$$

ist, wo γ_{00} der Abstand des Koordinatenanfangspunktes von der Berandung von $\mathfrak{G}$ ist. Es läßt sich somit stets ein $(p\,q)$ derart finden, daß

$$\varepsilon_{\nu\mu} = \left(\frac{\partial^{\nu+\mu}\left[u_{nm}(X,Z) - u_{nm}^{(p\,q)}(X,Z)\right]}{\nu!\,\mu!\,\partial X^{\nu}\,\partial Z^{\mu}}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} \qquad |\varepsilon_{\nu\mu}| \leqq \varepsilon', \tag{76}$$

wo ε' eine vorgegebene, für alle $(n\,m)$ Ungleichungen (75) unveränderte kleine Zahl ist. $u_{nm}^{(p\,q)}(X,Z)$ ist dabei eine Abkürzung für das Polynom

$$\sum_{s=1}^{s=(p\,q)} p_s(X,Z) \iiint_{\mathfrak{G}} u_{nm}(X,Z)\,\overline{p_s(X,Z)}\,d\omega_{XZ}\,. \tag{77}$$

Das Polynom

$$u_{nm}^{(p\,q)}(X,Z) + \sum_{(\nu\mu)=1}^{(\nu\mu)=(nm)} \varepsilon_{\nu\mu} X^{\nu} Z^{\mu}$$

ist eine zulässige Konkurrenzfunktion. Es ist weiter

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathfrak{G}} \Big[u_{nm}^{(p\,q)}(X,Z) + \sum_{(\nu\mu)=1}^{(\nu\mu)=(nm)} \varepsilon_{\nu\mu} X^{\nu} Z^{\mu}\Big]\,\overline{\Big[u_{nm}^{(p\,q)}(X,Z) + \sum_{(\nu\mu)=1}^{(\nu\mu)=(nm)} \varepsilon_{\nu\mu} X^{\nu} Z^{\mu}\Big]}\,d\\ \leqq \iiint_{\mathfrak{G}} u_{nm}^{(p\,q)}(X,Z)\,\overline{u_{nm}^{(p\,q)}(X,Z)}\,d\omega_{XZ}\\ + 2\varepsilon' \iiint_{\mathfrak{G}} \Big[|u_{nm}^{(p\,q)}(X,Z)|\,\Big[\sum_{\nu\mu=1}^{(\nu\mu)=(nm)} |X^{\nu} Z^{\mu}|\Big]\,d\omega_{XZ}.\end{aligned} \tag{78}$$

Nach (74) und (78) ist der in (78) links stehende Ausdruck kleiner oder gleich als

$$L_{nm} + \varepsilon' \text{ konst.}$$

Die linke Seite in der Ungleichung (78) ist offenbar größer oder gleich $J_{nm}^{(p\,q)} \geqq J_{nm}$. Es gilt somit auch die Ungleichung

$$L_{nm} + \varepsilon' \text{ konst.} \geqq J_{nm}. \tag{79}$$

Da man ε und ε' beliebig klein machen kann, folgt aus (73) und (79) die Beziehung (65), w. z. b. w.

Ist $F(X, Z)$ in $\mathfrak{G}$ regulär, und ist

$$\sum_{(\nu\mu)=1}^{(\nu\mu)=\infty} \alpha_{\nu\mu} X^{\nu} Z^{\mu} \tag{80}$$

das Funktionselement von $F(X, Z)$, so ist

$$J_{nm} \leqq \int\int_{\mathfrak{G}}\int\int F(X, Z)\, \overline{F(X, Z)}\, d\omega_{XZ}. \tag{81}$$

Da die Ungleichung (81) für jedes $(\nu\mu)$ gilt, so gilt auch

$$\operatorname*{limes}_{(nm)\to\infty} J_{nm} \leqq \int\int_{\mathfrak{G}}\int\int F(X, Z)\, \overline{F(X, Z)}\, d\omega_{XZ}. \tag{82}$$

Bei wachsenden (nm) stellen die J_{nm} eine Folge von nicht abnehmenden beschränkten Zahlen dar. Es existiert somit auch

$$J \equiv \operatorname*{limes}_{(nm)\to\infty} J_{nm}, \tag{83}$$

welchen Grenzwert wir als die Jacobische Reduzierte der Form $f(\alpha_{\nu\mu}, \overline{\alpha_{\nu'\mu'}})$ bezeichnen. Es gilt somit der

Satz V. *Die unendliche Hermitesche Form*

$$f(\alpha_{\nu\mu}, \overline{\alpha_{\nu'\mu'}}) \equiv \sum \alpha_{\nu\mu}\, \overline{\alpha_{\nu'\mu'}} \int\int_{\mathfrak{G}}\int\int X^{\nu} Z^{\mu}\, \overline{X^{\nu'} Z^{\mu'}}\, d\omega_{XZ} \tag{83}$$

besitzt eine und nur eine Jacobische Reduzierte J.

Es soll nunmehr mit Hilfe von unendlichen Determinanten eine zweite Darstellung für J (bzw. J_{nm}) angegeben werden. Wie in der Einleitung gesagt wurde, werden wir durch den Vergleich der beiden Darstellungen gewisse Formeln zur Bestimmung von g und des Paares V, W angeben können.

Wir wollen einige neue Bezeichnungen einführen. Sei M die unendliche Matrix

$$
\begin{array}{ccccccc}
A_{0000} & A_{1000} & A_{0100} & A_{2000} & A_{1100} & \cdots \\
A_{0010} & A_{1010} & A_{0110} & A_{2010} & A_{0210} & \cdots \\
A_{0001} & A_{1000} & A_{0101} & A_{2001} & A_{0201} & \cdots \\
A_{0020} & A_{1020} & A_{0120} & A_{2020} & A_{0220} & \cdots \\
A_{0011} & A_{1011} & A_{0111} & A_{2011} & A_{1111} & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{array} \tag{84}
$$

$$A_{\nu\mu\nu'\mu'} \equiv \int\int_{\mathfrak{B}}\int\int X^{\nu} Z^{\mu} \overline{X^{\nu'} Z^{\mu'}}\, d\omega_{XZ}.$$

Mit $M^{(n)}$ bezeichnen wir den Abschnitt von M, der aus n ersten Zeilen und Kolonnen besteht, und mit $D^{(n)}$ die Determinante der Matrix $M^{(n)}$. Die Minoren von $D^{(n)}$ werden wir mit $D^{(n)}_{\mathrm{I\,II}\ldots 1\,2\ldots}$, $D^{(n)}_{\mathrm{I\,III}\ldots 1\,3\ldots}$, ... bezeichnen, wobei die römischen Zahlen (bzw. Buchstaben in Klammern) die fehlenden Kolonnen, die arabischen die fehlenden Zeilen von $D^{(n)}$ angeben.

Bekanntlich[10]) ist:

$$
\begin{aligned}
J \equiv \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}}{D^{(p)}_{1\,1}} & \left| \alpha_{00} \right|^2 \\
+ \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{1\,1}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\,1\,2}} & \left| \alpha_{00} \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{1\,2}}{D^{(p)}_{1\,1}} + \alpha_{10} \right|^2 \\
+ \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\,1\,2}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,1\,2\,3}} & \left| \alpha_{00} \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\,2\,3}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\,1\,2}} + \alpha_{10} \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\,1\,3}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\,1\,2}} \right. \\
+ \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,1\,2\,3}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III\,IV}\,1\,2\,3\,4}} & \left| \alpha_{00} \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,2\,3\,4}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,1\,2\,3}} + \alpha_{10} \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,1}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,1} \right. \\
+ \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III\,IV}\,1\,2\,3\,4}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III\,IV\,V}\,1\,2\,3\,4\,5}} & \left| \alpha_{00} \lim_{n\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III\,IV}\,2\,3\,4\,5}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III\,IV}\,1\,2\,3\,4}} + \alpha_{10} \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III\,I}}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III\,I}} \right. \\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{85}
$$

[10]) Vgl. Jacobi, „Über eine elementare Transformation eines in bezug auf jedes von zwei Variablen-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks", Crelle Journal **53** (1857), S. 265—270, und O. Toeplitz, „Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlich viel Veränderlichen", Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1907), S. 101—109.

In einem wichtigen Spezialfalle nämlich dem der Treppenbereiche können wir ähnlich wie in der Arbeit II (vgl. Fußnote [1]) S. 641) vorgehen. Bezeichnet man mit α_ν die Seitenlängen des Treppenbereiches, so ist durch eine endliche Anzahl von Größen α_ν der Treppenbereich eindeutig gegeben. Die $A_{\nu\mu\nu'\mu'}$ sind Polynome in α_ν, die Deter-

Durch den Vergleich der Formeln (70) und (85) erhalten wir die Beziehungen:

$$(86)\qquad 4\pi^2 \int_0^{R_1} R^{2\nu+1} g^{2\mu+2}(R)\, dR = \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\ldots(k-1)\,1\,2\ldots k-1}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\ldots(k)\,1\,2\ldots k}},$$

$$(k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots),$$

$$(\nu\,\mu) = k,$$

woraus R_1 und $g(R)$ bestimmt werden können, ferner:

$$(87)\qquad \begin{aligned} b_{20} &= \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,1\,2\,4}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,1\,2\,3}}, \\ a_{20} &= \lim_{p\to\infty} \left(\frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,1\,3\,4}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,1\,2\,3}} - \frac{D^{(p)}_{1\,2}}{D^{(p)}_{1\,1}} \right), \\ b_{11} &= \lim_{p\to\infty} \left(3\frac{D^{(p)}_{1\,2}}{D^{(p)}_{1\,2}} - 2\,\frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,1\,2\,3}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,1\,3\,4}} \right), \\ a_{11} &= \lim_{p\to\infty} \left(\frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III\,IV}\,1\,2\,4\,5}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III\,IV}\,1\,2\,3\,4}} - \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\,2\,3}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II}\,1\,2}} \right) \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

$$\lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,1\,2\,4}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III}\,1\,2\,3}} + \alpha_{20}\Big|^2$$

$$\lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III\,IV}\,1\,2\,4\,5}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III\,IV}\,1\,2\,3\,4}} + \alpha_{20} \lim_{p\to\infty} \frac{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III\,IV}\,1\,2\,3\,5}}{D^{(p)}_{\mathrm{I\,II\,III\,IV}\,1\,2\,3\,4}} + \alpha_{11}\Big|^2$$

. . . . . .

Es ist leicht einzusehen, daß man der Reihe nach beliebig viel Koeffizienten der Funktionselemente von $X(V, W)$ und $Z(V, W)$ bestimmen kann.

minanten $D^{(p)}_{\ldots}$ lassen sich als Polynome (deren Grad von p abhängt) in α_ν darstellen. (Vgl. dazu S. 17 und 23 der Arbeit II.)

Eine interessante Anwendung der Theorie unserer Hermiteschen Formen wäre die Frage der Bestimmung der Modulen der mehrfach zusammenhängenden Gebiete der komplexen Ebene.

Korollar. *Ein Kreisbereich $\mathfrak{K}^*$ läßt sich vermittelst eines in $\mathfrak{K}^*$ regulären Funktionenpaares* (58) *nicht auf einen von $\mathfrak{K}^*$ verschiedenen Kreisbereich abbilden.*

Beweis. Die zu $\mathfrak{K}^*$ zugehörige Hermitesche Form f ist von vornherein in der Jacobischen Normalform dargestellt. Ließe er sich auf einen anderen abbilden, so wäre es möglich, f auf eine neue Jacobische Normalform zu transformieren, was dem Satz V widerspricht.

Die Darstellung (85) ist speziell: sie gilt nur in den Gebieten, in welchen das System $X^\nu Z^\mu$ vollständig ist.

Man gelangt aber zu einer allgemeinen Darstellung für J, wenn man wiederum ein in dem Bereich vollständiges Orthogonalfunktionensystem $\Omega_s(X, Z)$ zu Hilfe nimmt.

Wir erhalten dann für J den Ausdruck:

$$(88) \qquad J \equiv \frac{1}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}\,|\alpha_{00}|^2$$

$$+ \frac{\begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\Omega_s(a,b) & \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\Omega_s(a,b) \\ \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\frac{\overline{\partial \Omega_s(a,b)}}{\partial a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\frac{\overline{\partial \Omega_s(a,b)}}{\partial a} \\ \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\frac{\overline{\partial \Omega_s(a,b)}}{\partial a} \end{vmatrix}}\,|\alpha_{00}|^2 + \frac{\begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\Omega_s(a,b) & \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\Omega_s(a,b) \\ \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\frac{\overline{\partial \Omega_s(a,b)}}{\partial a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\frac{\overline{\partial \Omega_s(a,b)}}{\partial a} \\ \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\frac{\overline{\partial \Omega_s(a,b)}}{\partial a} \end{vmatrix}}\,|\alpha_{00}|^2 + \cdots$$

wobei die Minimumsfunktion in bezug auf den inneren Punkt a, b (und nicht speziell auf den Koordinatenanfangspunkt) normiert ist.

Die Darstellung (88) der Jacobischen Reduzierten gilt offenbar allgemein für alle in § 1 definierte Bereiche $\mathfrak{B}$. Das System $\Omega_s(X, Z)$ muß natürlich in $\mathfrak{B}$ vollständig sein.

Ferner: wird $\mathfrak{B}$ durch ein in bezug auf den Punkt a, b normiertes Funktionenpaar $X'(X, Z) - a'$, $Z'(X, Z) - b'$ in einen neuen Bereich $\mathfrak{B}'$ (mit gleichen Eigenschaften wie $\mathfrak{B}$) überführt, so wird offenbar eine Funktion $H(X, Z)$ [mit endlichen $\int\int_{\mathfrak{B}}\int\int H(X, Z)\,\overline{H(X, Z)}\,d\omega_{XZ}$], deren Funktionselement in der Umgebung der Stelle a, b mit der Potenz

$$(89) \qquad (X - a)^n (Z - b)^m$$

beginnt, in eine Funktion $H^*(X', Z')$ übergeführt, deren Funktionselement um den Punkt a', b' ebenfalls mit dem Glied

$$(90) \qquad (X'-a')^n (Z'-b')^m$$

beginnt. Aus den beiden Tatsachen folgt der

Satz VI. *Eine notwendige Bedingung dafür, daß ein Bereich $\mathfrak{B}$ auf einen anderen Bereich $\mathfrak{B}'$ vermittelst eines [in bezug auf den inneren Punkt von $\mathfrak{B}$: $a\,b$] normierten Funktionenpaares abgebildet werden kann, besteht darin, daß die für den Bereich $\mathfrak{B}$ gebildete Größenfolge:*

$$\frac{1}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}, \quad \frac{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}{\begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}} \\ \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\frac{\partial \Omega_s(a,b)}{\partial a}} \end{vmatrix}}, \ldots$$

der analogen für $\mathfrak{B}'$ übereinstimmt. $\Omega_s(X, Z)$ bedeutet das in $\mathfrak{B}$ (bzw. $\mathfrak{B}'$) vollständige Orthogonalfunktionensystem. *Lassen sich die Bereiche $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ auf Kreisbereiche abbilden, so ist die angegebene notwendige Bedingung auch hinreichend.*

* *

Das geschilderte Verfahren, nach welchem das Abbildungsfunktionenpaar, das einen Kreisbereich $\mathfrak{K}$ auf den Bereich $\mathfrak{B}$ abbildet, bestimmt wird, läßt sich auch auf den Fall verallgemeinern, daß es sich um eine Abbildung auf einen beliebigen Bereich $\mathfrak{B}'$ anstatt eines $\mathfrak{K}$ handelt.

Wir nehmen somit an, daß es ein Funktionenpaar (58) [vgl. S. 664] gibt, das den Bereich $\mathfrak{B}'$ des VW-Raumes auf den Bereich $\mathfrak{B}$ des XZ-Raumes abbildet.

Mit $\Omega_{\nu\mu}(X, Z)$ soll das vollständige Orthogonalfunktionensystem, das zu $\mathfrak{B}$ gehört, mit $\varphi_{\nu\mu}(V, W)$ dasjenige, das zu $\mathfrak{B}'$ gehört, bezeichnet werden.

Wir wollen die Koeffizienten $a_{\nu\mu}$, $b_{\nu\mu}$ der Funktionselemente (58) durch die $\Omega_{\nu\mu}$ und $\varphi_{\nu\mu}$ ausdrücken.

Hierzu betrachte man wieder unsere frühere Variationsaufgabe: Es ist das Minimum von

$$(92) \qquad \int\int_{\mathfrak{B}}\int\int |F(X, Z)|^2\, d\omega_{XZ}$$

unter der Nebenbedingung, daß die Funktion $F(X, Z)$ mit dem Polynom (62) [S. 665] beginnt, zu suchen. Eine formale Rechnung ergibt nun für den Wert des betreffenden Minimums:

$$(93)\qquad \frac{1}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}}\,|\alpha_{00}|^2 +$$

$$+\frac{\begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} & -\alpha_{00}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\partial\Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\Omega_s(a,b)} + \alpha_{10} \\ \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\Omega_s(a,b) & -\alpha_{00}\sum_{s=1}^{s=\infty}\Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\frac{\partial\Omega_s(a,b)}{\partial a}} \\ \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\Omega_s(a,b) & \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\frac{\partial\Omega_s(a,b)}{\partial a}} \end{vmatrix}}$$

$$+\frac{\begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial\Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial\Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\frac{\partial\Omega_s(a,b)}{\partial a}} \\ \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\frac{\partial\Omega_s(a,b)}{\partial a}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\frac{\partial\Omega_s(a,b)}{\partial a}} \\ \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\frac{\partial\Omega_s(a,b)}{\partial a}} \end{vmatrix}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\frac{\partial^{n'+m'}\Omega_s(a,b)}{\partial a^{n'}\partial b^{m'}}} \\ \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial^{n'+m'}\Omega_s(a,b)}{\partial a^{n'}\partial b^{m'}}\,\Omega_s(a,b) & \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial^{n'+m'}\Omega_s(a,b)}{\partial a^{n'}\partial b^{m'}}\,\overline{\frac{\partial^{n'+m'}\Omega_s(a,b)}{\partial a^{n'}\partial b^{m'}}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\frac{\partial^{n+m}\Omega_s(a,b)}{\partial a^n\partial b^m}} \\ \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial^{n+m}\Omega_s(a,b)}{\partial a^n\partial b^m}\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial\Omega_s^{n+m}(a,b)}{\partial a^n\partial b^m}\,\overline{\frac{\partial\Omega_s^{n+m}(a,b)}{\partial a^n\partial b^m}} \end{vmatrix}}\cdots\cdots + \alpha_{nn}$$

wobei für $a\,b$ die Werte $0, 0$ einzusetzen sind und $(n'\,m')$ das dem $(n\,m)$ Glied in der Reihenfolge, die in der Fußnote [4]) angegeben ist, Vorhergehende bedeutet.

Verpflanzen wir das ganze Problem in den VW-Raum, so haben wir das Minimum von

$$(94)\qquad \iint\limits_{\mathfrak{B}} F[X(V,W), Z(V,W)]\,\left|\frac{\partial(X,Z)}{\partial(V,W)}\right|^2 d\omega_{VW}$$

unter der Nebenbedingung, daß die Funktion $F[X(V,W), Z(V,W)]\,\frac{\partial(X,Z)}{\partial(V,W)}$ mit dem Polynom (69) [S. 667] beginnt, zu suchen.

Mit Hilfe der $\varphi_s(V,W)$ können wir in analoger Weise wie früher dieses Minimum berechnen, was eine zu (93) entsprechende Formel liefert.

Wir erhalten daher für den Wert dieses Minimums zwei verschiedene Darstellungen, die eine mit Hilfe von $\Omega_s(0,0)$ und deren Ableitungen und

die andere mit Hilfe der $\varphi_s(0,0)$ und deren Ableitungen. Die beiden Ausdrücke sind endliche Hermitesche Formen der (nm) Veränderlichen $\alpha_{\nu\mu}$ und derer Konjugierten $[(\nu\mu) = (0,0), (0,1), \ldots, (nm)]$.

Durch den Vergleich der beiden Darstellungen erhalten wir erstens die Tatsache, daß die in (91) angegebenen Ausdrücke bei der Transformation invariant bleiben, und zweitens die gesuchten Relationen, von denen die erste folgendermaßen lautet:

$$(95)\quad -\frac{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\frac{\partial\,\Omega_s(a,b)}{\partial a}}}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\Omega_s(a,b)}} = -\frac{\sum_{s=1}^{s=\infty} \varphi_s(a,b)\,\overline{\frac{\partial\,\varphi_s(a,b)}{\partial a}}}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \varphi_s(a,b)\,\overline{\varphi_s(a,b)}} + b_{11} + 2a_{20}$$

$$(a, b = 0, 0).$$

Zusatz bei der Korrektur. Es sei darauf hingewiesen, daß man einige ähnliche wie (95) Relationen zwischen den Koeffizienten $a_{\nu\mu}$, $b_{\nu\mu}$ der Funktionselemente desjenigen Funktionenpaares, das die Abbildung eines Bereiches $\mathfrak{B}$ auf den Bereich $\mathfrak{B}'$ übermittelt, auch ohne Benutzung der Minimumaufgabe aufstellen kann:

Die Funktionenfolge

$$\Omega_{\nu\mu}[X(V,W),\ Z(V,W)]\frac{\partial(X,Z)}{\partial(V,W)} \qquad [(\nu\mu) = (0,0)\ (1,0),\ (0,1), \ldots]$$

stellt offenbar ein vollständiges Orthogonalfunktionensystem, daß zu $\mathfrak{B}'$ gehört, dar. Bekanntlich ist der Kern des vollständigen Orthogonalfunktionensystems von der speziellen Wahl des Systems unabhängig. Berechnen wir den Kern erstens mit Hilfe des oben angegebenen Funktionensystems, zweitens mit Hilfe der $\varphi_{\nu\mu}(V,W)$ und entwickeln die beiden Ausdrücke in der Umgebung der Stelle $V = W = 0$, so gelangen wir wiederum durch den Vergleich der Koeffizienten der beiden Darstellungen zu Relationen, in denen die $a_{\nu\mu}$, $b_{\nu\mu}$ durch die Werte der $\Omega_{\nu\mu}$ und $\varphi_{\nu\mu}$ nebst deren Ableitungen an der Stelle 0, 0 ausgedrückt sind.

Ein anderer Weg, um die Möglichkeit der Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}^*$ festzustellen, besteht darin, daß man die Bereiche in Klassen einteilt, derart, daß solche Bereiche, die man aufeinander normiert abbilden kann, zu derselben Klasse gehören. In jeder Klasse gibt es einen und nur einen ausgezeichneten Repräsentantenbereich $\mathfrak{A}$. Sucht man das Minimum von (9), wobei als Nebenbedingung in einem Falle die erste Zeile, in zweitem Falle die zweite Zeile von (4) der Einleitung benutzt wird, so erhält man als Lösungen zwei Funktionen $u^{(1)}(X,Z)$ und $u^{(2)}(X,Z)$. Das Paar

$$\frac{u^{(1)}(X,Z)}{u(X,Z)} \quad \text{und} \quad \frac{u^{(2)}(X,Z)}{u(X,Z)}$$

liefert die Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{A}$. [11])

[11]) Eine ausführliche Darstellung dieses Gedankens erscheint demnächst in den Math. Annalen in der Arbeit: „Über die Existenz von Repräsentantenbereichen in der Theorie der Abbildung durch Paare von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen".

(Eingegangen am 15. April 1927.)

Ein Analogon der Quadrik von Lie in der projektiven Flächentheorie.

Von

E. Bompiani in Rom.

Es sei F eine Fläche des gewöhnlichen Raumes. Jedem allgemeinen Flächenpunkt P entspricht eine Quadrik (Fläche zweiter Ordnung), die Quadrik von Lie. Sie ist in der Ausdrucksweise des Unendlichkleinen folgendermaßen erklärt: Man ziehe durch drei unendlich benachbarte Punkte einer Asymptotenlinie die Tangenten an die Asymptotenlinien des anderen Systems; sie sind Erzeugende einer einzigen Quadrik. Die hierdurch erklärte Quadrik von Lie ist in jedem Flächenpunkt unabhängig von der Wahl der hindurchgehenden Asymptotenlinie und hängt nur von der Umgebung vierter Ordnung des Punktes P auf F ab.

Die Lie-Quadrik und die Tangentenebene doppelt gezählt, bestimmen das *Büschel der Quadriken von Darboux*. Um ein beliebiges Element dieses Büschels festzulegen, ist es nötig, eine weitere Quadrik des Büschels geometrisch zu erklären.

Zweck dieser Schrift ist, dieses Ziel zu erreichen durch Einführung einer Quadrik, die wie die Lie-Quadrik nur von der Umgebung vierter Ordnung des Flächenpunktes abhängt. Ihre Konstruktion ist ganz entsprechend derjenigen der Lie-Quadrik. Man braucht nur anstatt auf einer Asymptotenlinie, auf der Tangente einer Asymptotenlinie von drei unendlich benachbarten Punkten auszugehen, wofür wir im folgenden eine strengere Fassung geben werden.

§ 1.

Die Schmiegquadriken eines Elements zweiter Ordnung einer Flächenkurve.

Es sei C eine beliebige Kurve auf F, von der es genügt, ein Element zweiter Ordnung E_2 an einer Stelle P zu betrachten. Die geradlinige Fläche, die von den Tangenten an die Asymptotenlinien des einen Systems

in den Punkten von C gebildet hat, hat in P eine Schmiegquadrik, die wir eine *asymptotische Schmiegquadrik*[1]) von C in P nennen wollen. Es gibt ihrer zwei durch jede E_2. Geben wir ihre rechnerische Darstellung!

Der Flächenpunkt P soll die homogenen Koordinaten $x^i(u, v)$ haben und die u-Linien $(dv = 0)$ und v-Linien $(du = 0)$ sollen die, wie wir annehmen wollen, krummen Asymptotenlinien von F sein. Dann genügen die x^i einem integrierbaren System von Differentialgleichungen, die man auf folgende Gestalt bringen kann[2]):

$$(1) \qquad x_{uu} = \frac{\partial \lg \beta\gamma}{\partial u} x_u + \beta x_v + n x; \qquad x_{vv} = \frac{\partial \lg \beta\gamma}{\partial v} x_v + \gamma x_u + \nu x,$$

worin z. B.

$$x_{uu} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$$

bedeutet.

Man setze

$$(2) \qquad \begin{gathered} T = |X, x, x_u, x_v|; \qquad N = |X, x, x_u, x_{uv}|; \\ N_2 = |X, x, x_v, x_{uv}|; \qquad \Omega = |X, x_u, x_v, x_{uv}|, \end{gathered}$$

wo die großen X^i die Koordinaten eines beliebigen Raumpunktes sind und die rechten Seiten Determinanten bedeuten. Ferner setzen wir wie üblich:

$$H = -\left(\frac{\partial^2 \lg \beta\gamma}{\partial u \partial v} + \beta\gamma\right)\beta\gamma; \qquad \psi_1 = \frac{\partial \lg \beta\gamma^2}{\partial u}; \qquad \psi_2 = \frac{\partial \lg \beta^2\gamma}{\partial v};$$

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv;$$

$$(3) \qquad \delta^2 u = d^2 u + \frac{\partial \lg \beta\gamma}{\partial u} du^2; \qquad \delta^2 v = d^2 v + \frac{\partial \lg \beta\gamma}{\partial v} dv^2;$$

$$a_0 = \beta\gamma(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u);$$

$$a' = -\beta^2\gamma\, du^3 + \beta\gamma^2 H dv^3 + \varphi_2\left(\tfrac{1}{2}\psi_1 du - \psi_2 dv\right);$$

$$a'' = \beta\gamma^2 dv^3 - \beta^2\gamma H du^3 + \varphi_2\left(\psi_1 du - \tfrac{1}{2}\psi_2 dv\right);$$

$$e' = \gamma\, dv^3; \quad e'' = -\beta\, du^3; \quad b = \varphi_2 du; \quad c = \varphi_2 dv;$$

$$a_1 = a_0 + a'; \quad a_2 = a_0 + a''.$$

Die asymptotische Quadrik des ersten Systems, d. h. die, die mit Hilfe der Tangenten an die u-Kurven bestimmt ist und die zum Element

---

[1]) Vgl. meine Schriften; I. La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato; II. Ancora sulla geometria ..., Rend. Acc. d. Lincei **3** (1926), pp. 396–400; **4** (1926), pp. 262–267.

[2]) Hier ist die Normierung von Fubini verwendet. Vgl. Fubini-Čech, „Geometria proiettiva differenziale", Bologna 1927. Indessen spielt diese Normierung keine Rolle. Man könnte auch nicht-normierte Koordinaten verwenden.

$E_2(du, dv, \delta^2 u, \delta^2 v)$ gehört, hat die Gleichung

$$a_1 T^2 + bTN_1 + cTN_2 + 2e'(T\Omega - N_1 N_2) = 0, \tag{4}$$

die des zweiten Systems

$$a_2 T^2 + bTN_1 + cTN_2 + 2e''(T\Omega - N_1 N_2) = 0; \tag{5}$$

die Gleichung der Schmiegebene von E_2 ist

$$[a_0 + (\beta\, du^3 - \gamma\, dv^2)\,\beta\gamma]\,T + \varphi_2(N_1\, du + N_2\, dv) = 0. \tag{6}$$

§ 2.

Geometrische Festlegung einer neuen Quadrik im Büschel von Darboux.

Es sei C eine Kurve auf F mit der Tangente an die v-Linie an P als Wendetangente. Für ihr E_2 in P ist $du = 0$, $d^2u = -\gamma\, dv^2$, und aus der Gleichung (4) folgt

$$M \equiv \beta\gamma(H+1)\,T^2 + 2(T\Omega - N_1 N_2) = 0, \tag{7}$$

während für die Lie-Quadrik aus $du = d^2u = 0$ hervorgeht:

$$L \equiv \beta\gamma HT^2 + 2(T\Omega - N_1 N_2) = 0. \tag{8}$$

Wie man aus (7) ersieht, ist die Quadrik M unabhängig von der Wahl der Asymptotenlinie durch P. Sie ist die Schmiegquadrik in P zu den beiden geradlinigen Flächen, die von den asymptotischen Tangenten gebildet wird, welche als Leitlinie eine Flächenkurve mit einem Wendepunkt in P besitzen.

§ 3.

Neue Bestimmung derselben Quadrik.

Ich schicke eine allgemeinere Bemerkung voraus. Ich nenne den *asymptotischen Schmiegkegelschnitt* des ersten oder zweiten Systems einer E_2 auf F die Schnittlinie der Schmiegebene dieses Elements mit der zugehörigen asymptotischen Schmiegquadrik des ersten oder zweiten Systems. Dann gilt: *Der Ort der asymptotischen Schmiegkegelschnitte, z. B. des ersten Systems der E_2, die zu derselben Tangente (E_1) gehört, ist eine Quadrik mit der folgenden Gleichung*:

$$\begin{aligned}&\left[-2\beta^2\gamma\, du^3 + \beta\gamma^2(H+1)\,dv^3 + \varphi_2\left(\tfrac{1}{2}\psi_1\, du - \psi_2\, dv\right)\right]T^2 \\ &\quad - 2\varphi_2(N_1\, du + N_2\, dv)\,T + 2\gamma\, dv^3(T\Omega - N_1 N_2) = 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Diese Quadrik und die entsprechende zum anderen System gehörige sind invariant mit dem Linienelement E_1 von F verbunden, auch invariant gegenüber projektiven Verbiegungen der Fläche, da in den Gleichungen nur β und γ auftreten, aber nicht n und ν.

Insbesondere folgt aus $du = 0$ die Gleichung $M = 0$. Ebenso aus $dv = 0$. Das heißt: *Die invarianten Quadriken, die zu den Asymptotentangenten gehören, fallen mit der Quadrik $M = 0$ zusammen* (oder mit der doppelt gezählten Tangentenebene).

§ 4.

Invariante Bestimmung der Elemente zweiter Ordnung einer Flächenkurve.

Nach der geometrischen Deutung der Quadriken $M = 0$, $L = 0$, $T^2 = 0$ hat jede Quadrik des Büschels von Darboux mit diesen ein bestimmtes Doppelverhältnis[3]). Dies können wir dazu benutzen, um ein E_2 auf F projektiv festzulegen. Dazu bemerken wir: *Durch jeden asymptotischen Schmiegkegelschnitt einer E_2 geht genau eine Quadrik des Büschels von Darboux.* Beispielsweise geht durch den Kegelschnitt des ersten Systems die folgende Quadrik:

$$(10)\quad Q_1 = [2a_0 + a' + \beta\gamma(\beta\, du^3 - \gamma\, dv^3)]\, T^2 + 2e'(T\Omega - N_1 N_2) = 0.$$

Da bei gegebenem Linienelement $E_1(u, v; du : dv)$ E_2 nur von a_0 abhängt, folgt, daß bei gegebenem E_1 und $Q_1 = 0$ der Wert von a_0 und damit E_2 bestimmt ist. Das heißt: *Um ein Element E_2 durch ein gegebenes Element E_1 festzulegen, genügt es, den Wert eines Doppelverhältnisses anzugeben, beispielsweise das Doppelverhältnis der Quadriken Q_1, M, L, T^2.* Damit kennt man zwei projektive Invarianten von E_2, z. B.:

$$Dv(Q_1, M, L, T^2)$$
$$= 2\left[(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) + \left(\tfrac{1}{2}\psi_1\, du - \psi_2\, dv\right) du\, dv\right] : \gamma\, dv^3 - 1.$$

Die Flächenkurven, für die diese Invariante den Wert -1 hat, sind die Extremalen der Differentialform

$$\chi_1 \quad \beta \frac{du^2}{dv}$$

und analog die von $\chi_2 = \gamma \frac{dv^2}{du}$.

Damit hat man für diese Extremalen eine neue Kennzeichnung gewonnen (unabhängig von ihrer Extremaleigenschaft).

[3]) Für die Konstruktion der Quadrik von Moutard hat Čech in Fubini-Čech II, S. 533 eine Quadrik M_0 eingeführt, von der man keine geometrische Bedeutung kannte. Sie ist dadurch bestimmt, daß das Doppelverhältnis $Dv(M_0, M, L, T^2) = \frac{5}{3}$ ist. Entsprechend dem folgenden § 5 kann somit M_0 als asymptotische Schmiegquadrik konstruiert werden. Auch die kanonische F_2 von G. M. Green [Trans. Amer. Math. Soc. **20** (1919)] findet damit ihre geometrische Deutung, die bisher noch nicht gelungen war.

§ 5.

Die Quadriken von Darboux.

Die Quadriken von Darboux kann man auch unmittelbar festlegen ohne Kenntnis von L und M mittels einer projektiven Invariante des Grenzwerts eines Doppelverhältnisses.

Es sei E_2 ein Kurvenelement, das mit der Asymptotenlinie du in P das Element E_1 und die zugehörige Schmiegebene gemeinsam hat, die P in F berührt. E_2 ist bestimmt durch $du = 0$, $dv \neq 0$; $d^2v = 0$, $d^2u = -\Theta\gamma\, dv^2$. Durch Änderung von Θ erhält man alle E_2 dieser Art. Die Entwicklung der x^i gibt auf Grund von (1) bis auf Glieder zweiter Ordnung für $du = 0$:

$$x + \frac{1}{2}(d^2u + \gamma\, dv^2)\, x_u + \left(dv + \frac{1}{2}\frac{\partial \lg \beta\gamma}{\partial v} dv^2\right) x_v$$

$$= x + \frac{1}{2}\gamma\,(1 - \Theta)\, dv^2 x_u + \left(dv + \frac{1}{2}\frac{\partial \lg \beta\gamma}{\partial v} dv^2\right) x_v .$$

Für $\Theta = 0$ erhält man das Element der Asymptotenlinien. Man sieht leicht ein, daß die projektive Berührungsinvariante[4]) zwischen E_2 und der berührenden Asymptotenlinie gleich $1 - \Theta$ ist.

Die Quadrik (4) von E_2 hat die Gleichung

$$\beta\gamma\,(H + \Theta)\, T^2 + 2\,(T\Omega - N_1 N_2) = 0 .$$

Jede Quadrik von Darboux ist asymptotische Schmiegquadrik eines Elements E_2 von F, das eine Asymptotenlinie berührt und in der Schmiegebene enthalten ist. Sie ist völlig bestimmt durch die projektive Berührungsinvariante zwischen der Asymptotenlinie und dem Element E_2.[5])

§ 6.

Neue Bestimmung der Quadrik M.

Die Quadrik M ergibt sich auch ohne weiteres aus einem andern Gesichtspunkt.

[4]) Vgl. Fubini-Čech II, Anhang 2, S. 676.

[5]) Durch Vergleich dieses Ergebnisses mit dem meiner Schrift II in Anmerkung [1]) erhält man eine neue Konstruktion der invarianten Quadriken (Nr. 7) einer Differentialgleichung vom Typus $v''' = Av'^3 + Bv'^2 + Cv' + D$. Die Schmiegquadriken sind auch von J. Kloboučeк untersucht in der Arbeit: Quadrique osculatrice le long d'une génératrice etc. [Bull. intern. de l'Acad. des Sciences de Bohème 1926]; wo auch bemerkt ist, daß die Schmiegquadriken eines Elements E_2, das eine Asymptotenlinie berührt, nur von einer Invariante (Verhältnis der Krümmungen von E_2 und der Asymptotenlinie) abhängen.

Aber keine dieser Quadriken ist für sich selbst studiert (wie $M = 0$).

Es sei eine Zuordnung gegeben zwischen den Punkten der Fläche F und den Geraden eines W-Systems. Ich werde an anderer Stelle zeigen: Zu jedem Paar entsprechender Elemente (Punkt und Gerade) sind durch die Abbildung zwei Quadriken bestimmt, die die Gerade enthalten. Man lasse nun jedem Punkt P von F die Tangente an die Asymptotenlinie des einen Systems entsprechen, welche Tangenten ein besonderes W-System bilden. Dann findet man:

Die Quadriken, die vermöge der Abbildung zu jedem Flächenpunkt gehören, sind unabhängig von der Wahl des Systems von Asymptotenlinien die doppelt gezählte Tangentenebene und die Quadrik M von F in P.[6])

[6]) Über die Anwendung der Quadrik $M = 0$ zur geometrischen Deutung von Fubinis projektiver Normalen vgl. meine Schrift: Fascio di Quadriche di Darboux e normale projettiva ... [Rend. Lincei, 1927].

(Eingegangen am 22. September 1927.)

On some properties of polynomials[1].

By

J. A. Shohat (Jacques Chokhate) in Ann Arbor (U.S.A.).

Introduction.

The present paper is divided into two parts. In the first part we give in a more precise form certain inequalities due to Tchebycheff and W. Markoff dealing with the modulus and the coefficients of a polynomial in general, in particular, with the coefficient of its highest power. In the second part we state conditions, necessary or sufficient, for the integral $\int_a^b p(x)\,\Pi(x)\,dx$ to be $\geqq 0$ or $\leqq 0$, where (a, b) is finite, $p(x) \geqq 0$ on (a, b) is subject to certain conditions, $\Pi(x)$ is an arbitary polynomial. This enables us to state for polynomials a more precise form of Rolle's theorem. This yields also some interesting results concerning *monotonic polynomials*, among others, a theorem of Tchebycheff.

The method used is of an elementary nature, using some simple results of the Theory of Approximation and of the theory of Tchebycheff polynomials. In the most interesting applications we need even less - only the coefficient of the highest power for the normalized Legendre polynomial.

§ 1.

On polynomials deviating the least from zero.

We shall write,

$$G_n(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i,\quad M[G_n; a, b] \text{ (or abbreviatedly, } M),\quad M[G_n; \overset{m}{\underset{1}{x_i}}],$$

to denote resp.: an *arbitrary* polynomial of degree $\leqq n$ (subject, if necessary, to certain conditions), max. of $|G_n(x)|$ for $a \leqq x \leqq b$, max. $|G_n(x)|$ for $x = x_1, x_2, \ldots, x_m$.

[1] Presented to the American Mathematical Society in April 1925. In the intervening time some new results have been added.

Definition. The polynomial $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$, satisfying certain conditions, is said to be the *least deviating from zero* in a finite interval (a, b), if $M[P_n; a, b] \leqq M[G_n; a, b]$ for any $G_n(x)$ satisfying the same conditions as $P_n(x)$. The quantity $E_n = E_n(P_n; a, b) = M[P_n; a, b]$ we call the *least deviation from zero* in (a, b) for the family $\{G_n(x)\}$ under consideration. The points x_i in (a, b), where $P_n(x_i) = \pm E_n$, we call *points of deviation.*

Particular cases. 1°. Among all polynomials $G_n(x)$ with a certain $g_k = 1$ $(0 < k \leqq n)$, the least deviates from zero in $(-1, 1)$

$$P_n(x) \equiv \frac{T_{n-1+\varepsilon}(x)}{B_k} \qquad (\varepsilon = 0, 1;\ k \equiv n - 1 + \varepsilon \pmod 2), \tag{1}$$

$$T_n(x) = \operatorname{Cos} n \operatorname{arc\,cos} x$$

$$= 2^{n-1}\left[x^n - \frac{n}{4}x^{n-2} + \ldots + (-1)^i \frac{n(n-i-1)\ldots(n-2i+1)}{i!} 2^{-2i} x^{n-2i} + \ldots\right]$$

$$= \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n}{2} \equiv \sum_{k=0}^{n} B_k x^k$$

("trigonometric polynomial")[2].

The least deviation here is

$$E_n(P_n; -1, 1) = \frac{1}{B_k}, \tag{3}$$

and the points of deviation are

$$\underset{0}{\overset{n-1+\varepsilon}{x_i}} = \operatorname{Cos} \frac{i\pi}{n-1+\varepsilon} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1+\varepsilon). \tag{4}$$

2°. $\dfrac{AT_n(x)}{T_n^{(k)}(z)}$ is the least deviating from zero in $(-1, 1)$ among all polynomials $G_n(x)$ such that

$$G_n^{(k)}(z) = A \ (\neq 0) \qquad (|z| > 1;\ k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

The least deviation here is

$$E_n = \left|\frac{A}{T_n^{(k)}(z)}\right|.\ ^{3)\,4)} \tag{6}$$

The points of deviation are given by (4) with $\varepsilon = 1$.

---

[2]) W. Markoff, Über Polynome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen (Übersetzt von Dr. J. Grossmann), Math. Annalen 77 (1916), pp. 213–258; pp. 231, 237.

[3]) Cf. Tchebycheff, On functions deviating the least from zero for certain values of the variable, Collected Papers (in Russian) 2, pp. 335–356; pp. 342–343 (for $k = 0$), and for any $k = 0, 1, 2, \ldots$.

[4]) J. Shohat, On a certain class of polynomials deviating the least from zero on a given interval (Thesis, in Russian), Ekatherineburg 1918, pp. 1–156; p. 25.

The two foregoing cases are particular cases of polynomials $P_n(x)$ deviating the least from zero in (a, b) and satisfying the relation

$$\omega(P_n) \equiv \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p_i = 1 \tag{7}$$

with arbitrarily given constants $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. With regard to these polynomials we state [5])

Theorem I. *Let x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ denote the points of deviation of a polynomial deviating the least from zero in (a, b) and satisfying the relation (7). Then*

$$|\omega(G_n)| \leqq \frac{M[G_n; a, b]}{E_n[P_n; a, b]},$$

equality being attained by $\pm \frac{M[G_n; a, b]}{E_n[P_n; a, b]} P_n(x)$ only.

§ 2.

Some formulas from the theory of Tchebycheff polynomials.

Let

$$\varphi_n(p; a, b; x) \equiv \varphi_n(p; x) \equiv \varphi_n(x) = a_n(p)[x^n - S_n(p)x^{n-1} + \ldots] \tag{8}$$
$$[n = 0, 1, 2, \ldots;\ a_n > 0]$$

denote a system of orthogonal and normal Tchebycheff polynomials corresponding to the interval (a, b) with the characteristic function $p(x) \geqq 0$ in (a, b), i. e.

$$\int_a^b p(x)\varphi_m(p; x)\varphi_n(p; x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}, \tag{9}$$

which is equivalent to

$$\int_a^b p(x)\varphi_n(p; x)G_{n-1}(x)\,dx = 0. \tag{10}$$

Then [6]),

$$\min \int_a^b p(x)(x^n + G_{n-1}(x))^2\,dx = \frac{1}{a_n^2(p)}, \tag{11}$$

$$a_n(p) > \frac{2^{2n-1}}{(b-a)^n \sqrt{\int_a^b p(x)\,dx}}, \tag{12}$$

---

[5]) loc. cit. [4]), p. 17.

[6]) Cf., for ex., J. Shohat, On a general formula in the theory of Tchebycheff polynomials and its applications, Transactions of the American Math. Society **29** (1927), pp. 569—583; pp. 573, 575, 577.

$$a_n(p) = \left(\frac{4}{b-a}\right)^n A(p)(1+o(1)),$$

(13) if $\dfrac{\log p(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ is (L) integrable in (a, b), [7])

$$A(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi(b-a)}} \cdot \exp. - \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\log p(x)\, dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

§ 3.

Bounds for the modulus of a polynomial and its coefficients.

Let the finite interval (a, b) be reduced to $(-1, 1)$. In Theorem I we take

$$\omega(G_n) \equiv G_n^{(k)}(z) \quad (z \text{ real}, |z| > 1), \qquad \omega(G_n) \equiv g_k.$$

We get, making use of formulas (1) to (6),

$$|G_n^{(k)}(z)| \leqq M\left[G_n; \overset{n}{\underset{0}{x_i}}\right] \cdot |T_n^{(k)}(z)| \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{14}$$

$$|g_k| \leqq M\left[G_n; \overset{n-1+\varepsilon}{\underset{0}{x_i}}\right] \cdot |B_k| \qquad (0 < k \leqq n), \tag{15}$$

equality being attained if and only if

$$G_n(x) = C T_n(x) \text{ (in (14))}, \qquad G_n(x) = C T_{n-1+\varepsilon}(x) \text{ (in (15))} \tag{16}$$
$$(C = \text{const.}).$$

In particular,

$$|g_n| \leqq M\left[G_n; \overset{n}{\underset{0}{x_i}}\right] \cdot 2^{n-1} \qquad \left(x_i = \operatorname{Cos}\frac{i\pi}{n}\right). \tag{17}$$

Formulas (14) (for $k = 0$) and (15) were given by Tchebycheff [8]) and W. Markoff [8]) in a less precise form, with $M[G_n; -1, 1]$ $\left(\geqq M\left[G_n; \overset{n-1+\varepsilon}{\underset{0}{x_i}}\right]\right)$ on the right side.

We can go further and *find a lower limit for* $|g_n|$, if we make an additional assumption:

(18) *all roots of* $G_n(x)$ *are real, distinct and between* $(-1, 1)$.

Then evidently $|G_n(x)|$ for $-1 \leqq x \leqq 1$ attains $n+1$ maxima with alternating sign of $G_n(x)$. They are: $n-1$ roots of $G_n'(x)$ and the points ± 1. We state

[7]) G. Szegö, Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems. Math. Annalen 82 (1921), pp. 188–212; p. 208.

[8]) loc. cit. [3]) and [2]).

Theorem II. *Consider all polynomials* $G_n(x)$ *satisfying* (18), *and let* $M_m \equiv M_m(G_n; -1, 1)$ *denote the smallest of the* $n+1$ *maxima of* $|G_n(x)|$ *for* $-1 \leqq x \leqq 1$. *Then,*

$$1^\circ. \qquad 2^{n-1} M_m[G_n; -1, 1] \leqq |g_n| \leqq 2^{n-1} M\left[G_n; \overset{n}{\underset{0}{x_i}}\right],$$

$$x_i = \operatorname{Cos} \frac{i\pi}{n} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

equality on either side implying equality on the other side and holding for $G_n(x) = CT_n(x)$ $(C = \pm M_m = \text{constant})$ *only.*

2°. $M_m \leqq M\left[G_n; \overset{n}{\underset{0}{x_i}}\right] \leqq M$, *the equalities* $M_m = M\left[G_n; \overset{n}{\underset{0}{x_i}}\right]$, *or* $M_m = M$ *holding for the trigonometric polynomial given in* 1° *only.*

Proof. 1°. We observe that $r_n(x) = \frac{G_n(x)}{g_n} = x^n + G_{n-1}(x)$, according to our hypothesis, alternates sign at $n+1$ successive points in $(-1, 1)$ giving maxima of $|G_n(x)|$. On the other hand, the least deviation from zero of the family of polynomials $\{x^n + G_{n-1}(x)\}$, being equal to $\frac{1}{2^{n-1}}$ (by (3)), is less than the smallest of the above maxima [9]); therefore, $\frac{1}{2^{n-1}} \geqq \frac{M_m}{|g_n|}$, equality holding only for $G_n(x) = CT_n(x)$, since $\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ is in this case the polynomial of the best approximation (take $k = n$ in (1)).

To prove 2°, we notice that any one of the equalities given in 2° implies: $|g_n| = 2^{n-1} M\left[G_n; \overset{n}{\underset{0}{x_i}}\right]$, and this, it has been shown, holds for $CT_n(x)$ only.

Corollary. *The smallest of the maxima of* $|\varphi_n(p; a, b; x)|$ *in* (a, b) *remains finite for* $n \to \infty$, *for any finite* (a, b) *and for any* $p(x)$ *satisfying* (13). In fact, we can apply here Theorem II, since $\varphi_n(p; x)$, as it is known, satisfies (18), and (13) gives,

$$(19) \qquad M_m \leqq \frac{a_n(p)}{2^{2n-1}} \leqq 2A(p)(1 + o(1)).$$
$$(b-a)^n$$

Note. In case $|G_n(x)|$ has several maxima in $(-1, 1)$, but does not satisfy (18), then Theorem II falls, for $G_n(x) + C$, where $C > 0$ is sufficiently large, has no real roots in $(-1, 1)$, but the same g_n and the same points of deviation as $G_n(x)$, and *all* the maxima of $|G_n(x) + C|$

[9]) Ch. de la Vallée Poussin, Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée d'un angle, Bull. de l'Académie Royale de Belgique, cl. des Sc. (1910), pp. 808–844; p. 827.

can be made larger than $\frac{g_n}{2^{n-1}}$. It is also easy to construct a polynomial $G_n(x)$ satisfying (18) with $M_m < M\left[G_n; \overset{n}{\underset{0}{x_i}}\right] = M$ (take all roots of $G_n(x)$ in the interval $(-1, x_1)$ sufficiently near the point $x = -1$).

§ 4.

On integrals involving polynomials.

The relations (9) give

$$(20) \qquad \int_a^b p(x)\, G_n^2(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} A_i^2 \qquad \left(A_i = \int_a^b p(x)\, G_n(x)\, \varphi_i(p; x)\, dx\right).$$

Let $\Pi(x) = h x^s + \ldots$ $(s > 0)$ be a polynomial of degres s, $\geqq 0$ in (a, b). Then, using the orthogonality relations for $\varphi_n(p\Pi; a, b; x)$, we get

$$\Pi(x)\, \varphi_n(p\Pi; x) = \sum_{i=0}^{s} A_{n+i}\, \varphi_{n+i}(p; x),$$

$$\int_a^b p(x)\, \Pi^2(x)\, \varphi_n^2(p\Pi; x)\, dx = \sum_{i=0}^{s} A_{n+i}^2 > A_{n+s}^2 = \frac{h^2\, a_n^2(p\Pi)}{a_{n+s}^2(p)},$$

$$(21) \quad M[\Pi; a, b] \int_a^b p(x)\, \Pi(x)\, \varphi_n^2(p\Pi; x)\, dx = M[\Pi; a, b] > \frac{h^2\, a_n^2(p\Pi)}{a_{n+s}^2(p)}.$$

Applying (11), we get readily

$$\frac{1}{a_n^2(pq\Pi)} > \frac{q_{\min}}{a_n^2(p\Pi)} \qquad (q(x) \geqq q_{\min} > 0 \text{ in } (a, b)),$$

where, in general, $f_{\min}^{\max}$ stands for $\overset{\max}{\underset{\min}{}}$ of $f(x)$ in (a, b), and (21), combined with (12), gives

$$(22) \quad \frac{2^{2n-1}}{(b-a)^2 \sqrt{\int_a^b p(x)\, q(x)\, \Pi(x)\, dx}} < a_n(pq\Pi) < \frac{a_{n+s}(p)}{|h|} \sqrt{\frac{M[\Pi; a, b)]}{q_{\min}}},$$

$$(23) \qquad \int_a^b p(x)\, q(x)\, \Pi(x)\, dx > \frac{2^{2n-2}\, h^2\, q_{\min}}{a_{n+s}^2(p)\, \Pi_{\max}}.$$

Formulas (22), (23) *hold for any* $p(x)$, $q(x)$ *and any polynomial* $\Pi(x) = h x^s + \ldots$ (*all* $\geqq 0$ *in* (a, b)).

Now let $\Pi(x) = h x^s + \ldots$ be an *arbitrary polynomial* of degree s (> 0). Then we apply (23) with $n \to \infty$, first, to $\Pi_{\max} - \Pi(x)$, then we replace $\Pi(x)$ by $-\Pi(x)$, and we get the *following formulas valid for any polynomial* $\Pi(x) = h x^s + \ldots$,

$$Q^2\Pi_{\max} - \frac{H}{\Pi_{\max}-\Pi_{\min}} > \int_a^b p(x)\,q(x)\,\Pi(x)\,dx > \frac{H}{\Pi_{\max}-\Pi_{\min}} + Q^2\Pi_{\min},$$

(24)

$$Q^2 = \int_a^b p(x)\,q(x)\,\Pi(x)\,dx, \qquad H = \frac{h^2\,q_{\min}}{4A^2(p)}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{2s}$$

($p(x)$ satisfies (13)).

Formula (24), applied to the polynomial

$$\Pi_1(x) = \Pi(x) - A_0\,\varphi_0(p\,q;\,x) \qquad \left(A_0 = \int_a^b p(x)\,q(x)\,\Pi(x)\,\varphi_0(p\,q;\,x)\,dx\right),$$

for which $\int_a^b p(x)\,q(x)\,\Pi_1(x)\,dx = 0$, yields

Theorem III. *Let (a, b) be an arbitrary finite interval with $p(x)$ satisfying* (13) *and $q(x) \geqq q_{\min} > 0$ in (a, b). Let $\Pi(x) = h\,x^s + \ldots$ be any polynomial of degree s (> 0) with the development*

$$\Pi(x) = \sum_{i=0}^{s} A_i\,\varphi_i(p\,q;\,x) \qquad \left(A_i = \int_a^b p(x)\,q(x)\,\Pi(x)\,\varphi_i(p\,q;\,x)\,dx\right).$$

Then,

$$\Pi_{\max} > \frac{1}{2}\left\{A_0\,\varphi_0 + \Pi_{\min} + \sqrt{(A_0\,\varphi_0 + \Pi_{\min})^2 + \frac{4H}{Q^2}}\right\},$$

$$\Pi_{\min} < \frac{1}{2}\left\{A_0\,\varphi_0 + \Pi_{\max} - \sqrt{(A_0\,\varphi_0 + \Pi_{\max})^2 + \frac{4H}{Q^2}}\right\}.$$

Corollary. 1°. *The inequalities* $\int_a^b p(x)\,q(x)\,\Pi(x)\,dx \geqq 0$ or $\leqq 0$ *imply resp.,*

$$\Pi_{\max} > \frac{1}{2}\left\{\Pi_{\min} + \sqrt{\Pi_{\min}^2 + \frac{4H}{Q^2}}\right\}, \qquad \Pi_{\min} < \frac{1}{2}\left\{\Pi_{\max} - \sqrt{\Pi_{\max}^2 + \frac{4H}{Q^2}}\right\}.$$

2°. *The inequalities*

$$\Pi_{\max} \leqq \frac{1}{2}\left\{\Pi_{\min} + \sqrt{\Pi_{\min}^2 + \frac{4H}{Q^2}}\right\}, \qquad \Pi_{\min} \geqq \frac{1}{2}\left\{\Pi_{\max} - \sqrt{\Pi_{\max}^2 - \frac{4H}{Q^2}}\right\}$$

imply resp.[10]),

$$\int_a^b p(x)\,q(x)\,\Pi(x)\,dx < 0, \qquad \int_a^b p(x)\,q(x)\,\Pi(x)\,dx > 0.$$ [11])

---

[10]) We have then resp., $\Pi_{\max} < |\Pi_{\min}|$, $\Pi_{\max} > |\Pi_{\min}|$.

[11]) Take in (24) $q(x) = 1$, $p(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, and we get an upper limit for $|h|$, which, however, is higher than that given by (17) applied to $\Pi(x) - \frac{\Pi_{\max}+\Pi_{\min}}{2}$:

$$|h| < \frac{2^{2s-2}}{(b-a)^s}(\Pi_{\max} - \Pi_{\min}).$$

Apply (24) to the polynomial $\Phi(x) = \Pi(x) - \frac{\Pi_{\max} + \Pi_{\min}}{2}$ $\left(\text{with } \Phi_{\max} = -\Phi_{\min} = \frac{\Pi_{\max} - \Pi_{\min}}{2}\right)$, and we get another

Corollary. *For any polynomial* $\Pi(x) = hx^s + \dots$

$$Q^2 \frac{\Pi_{\max} - \Pi_{\min}}{2} - \frac{H}{\Pi_{\max} - \Pi_{\min}} > \int_a^b p(x)\, q(x)\, \Pi(x)\, dx - \frac{\Pi_{\max} + \Pi_{\min}}{2} \int_a^b p(x) q(x)\, dx$$
$$> \frac{H}{\Pi_{\max} - \Pi_{\min}} - Q^2 \frac{\Pi_{\max} - \Pi_{\min}}{2}.$$

§ 5.

A more precise form of the mean-value theorem for polynomials.

Apply (24) with $p(x) = q(x) = 1$ to

$$\Pi(x) \equiv F'(x), \qquad F(x) = Ax^n + \dots$$

arbitrary polynomial of degree n, and we get a *generalisation for polynomials of the mean-value theorem*:

$$(25) \qquad F'_{\max} - \frac{\pi A^2 n^2}{8(F'_{\max} - F'_{\min})} \cdot \left(\frac{b-a}{4}\right)^{2n-2} > \frac{F(b) - F(a)}{b-a}$$
$$> \frac{\pi A^2 n^2}{8(F'_{\max} - F'_{\min})} \cdot \left(\frac{b-a}{4}\right)^{2n-2} + F'_{\min}.$$

§ 6.

On monotonic polynomials.

Take in (25) $F(x) = Ax^n + \dots$ an arbitrary polynomial of degree n *monotonic*, say, increasing in (a, b). Then,

$$(26) \qquad F'_{\max}(F'_{\max} - F'_{\min}) - \frac{\pi A^2 n^2}{8} \left(\frac{b-a}{4}\right)^{2n-2} > (F'_{\max} - F'_{\min}) \frac{F(b) - F(a)}{b-a}$$
$$> \frac{\pi A^2 n^2}{8} \left(\frac{b-a}{4}\right)^{2n-2} + F'_{\min}(F'_{\max} - F'_{\min}) \; (> 0).$$

We find easily for the roots $z_{1,2}$ of the equation

$$z^2 - z\left[F'_{\min} + \frac{F(b) - F(a)}{b-a}\right] - \left[\frac{\pi A^2 n^2}{8} \left(\frac{b-a}{4}\right)^{2n-2} - F'_{\min} \frac{F(b) - F(a)}{b-a}\right] = 0,$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{F'_{\min} + \frac{F(b) - F(a)}{b-a} \pm \sqrt{\left(\frac{F(b) - F(a)}{b-a} - F'_{\min}\right)^2 + \frac{\pi A^2 n^2}{2} \left(\frac{b-a}{4}\right)^{2n-2}}\right\}$$
$$(z_1 > z_2).$$

Therefore, in view of (26), considering together with $F(x)$ the polynomial $-F(x)$, we get,

$$F'_{\max} > \frac{1}{2}\left\{F'_{\min} + \frac{F(b)-F(a)}{b-a} + \sqrt{\left(\frac{F(b)-F(a)}{b-a} - F'_{\min}\right)^2 + \frac{\pi A^2 n^2}{2}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{2n-2}}\right\},$$

(27)

$$F'_{\min} < \frac{1}{2}\left\{F'_{\max} + \frac{F(b)-F(a)}{b-a} + \sqrt{\left(F'_{\max} - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}\right)^2 + \frac{\pi A^2 n^2}{2}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{2n-2}}\right\}.$$

$$(28)\quad |F'|_{\max} > \frac{1}{2}\left\{\left|\frac{F(b)-F(a)}{b-a}\right| + \sqrt{\left(\frac{F(b)-F(a)}{b-a}\right)^2 + \frac{\pi A^2 n^2}{2}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{2n-2}}\right\}$$

$$> \left|\frac{F(b)-F(a)}{b-a}\right| + |A|\, n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n-1}.$$

Formula (25) gives also,

$$(29)\qquad \left|\frac{F(b)-F(a)}{b-a}\right| > \frac{\pi A^2 n^2}{8|F'|_{\max}}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{2n-2}.$$

Formulas (23) to (29) *hold for an arbitrary polynomial* $F(x) = Ax^n + \ldots$ *monotonic in* (a, b).

Formula (29) gives a lower limit for $|F'|_{\max}$ in case of a monotonic polynomial:

$$(30)\qquad |F'|_{\max} > \frac{\pi A^2 n^2}{2\,|F(b)-F(a)|}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{2n-1},$$

which is interesting to combine with the upper limit for $F'_{\max}$ given by A. Markoff[12] [13] for an arbitrary polynomial

$$|F'|_{\max} \leqq \frac{2n^2}{b-a}|F|_{\max}.$$

We thus obtain in our case,

$$(31)\qquad |F|_{\max} > \frac{\pi A^2\left(\frac{a-b}{4}\right)^{2n}}{|F(b)-F(a)|}.$$

In (31) $F(x) = Ax^n + \ldots$ is monotonic in (a, b). Therefore,

$$|F|_{\max} = |F(b)| \quad \text{or} \quad |F(a)|,$$

$$(32)\qquad |F|_{\max} > \frac{1}{2}\left\{F(c) + \sqrt{F^2(c) + 4\pi^2 A^2 n^2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{2n}}\right\},$$

$$c = \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \quad \text{for} \quad F(x) \begin{matrix} \text{increasing} \\ \text{decreasing} \end{matrix}, \quad |F|_{\max} = \left|F\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\right|;$$

[12] A. Markoff, On Mendeleieff's problem, Bull. of the Russian Academy of Sciences **62** (1889), pp. 1–24; p. 24; cf. also:

[13] I. Schur, Über das Maximum des absoluten Betrages eines Polynoms in einem gegebenen Intervall, Math. Zeitschr. **4** (1919), pp. 271–287; pp. 274, 275, 278.

$$(33)\qquad |F|_{\max} > \frac{1}{2}\left\{-F(c)+\sqrt{F^2(c)+4\pi^2A^2n^2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{2n}}\right\},$$

$$c=\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\quad\text{for}\quad F(x)\begin{matrix}\text{decreasing}\\ \text{increasing,}\end{matrix}\qquad |F'|_{\max} = -F\begin{pmatrix}b\\ a\end{pmatrix}.$$

Finally, we apply (24), with $p(x)=q(x)=1$, to the monotonic polynomial

$$\Pi(x)=\int_a^x (Bx^m+\ldots)\,dx \quad (Bx^m+\ldots \geqq 0 \text{ for } a\leqq x\leqq b),$$

and we get,

$$(34)\qquad \int_a^b (Bx^m+\ldots)\,dx > \frac{\pi|B|}{m+1}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{m+1} \quad (Bx^m+\ldots\geqq 0 \text{ for } a\leqq x\leqq b).$$

Therefore, *if* $\left|\int_a^b (Bx^m+\ldots)\,dx\right| \leqq \frac{\pi|B|}{m+1}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{m+1}$, *then the polynomial* $Bx^m+\ldots$ *necessarily changes sign in* (a,b), or, in other words, *if* $F(x)=x^n+\ldots$, *and* $F(b)-F(a) \leqq \pi\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$, *then* $F'(x)$ *necessarily changes sign in* (a,b).[14])

§ 7.

Application to functions in general.

Let $f(x)$ be integrable in (a,b). Then for the polynomial

$$(35)\qquad \Pi(x)=\sum_{i=0}^{s}{}' A_i\varphi_i(pq;x) \quad \left(A_i=\int_a^b q(x)p(x)f(x)\varphi_i(pq;x)\,dx\right),$$

we have *for any* s (see (9))

$$(36)\qquad \int_a^b p(x)q(x)\Pi(x)\,dx=\int_a^b p(x)q(x)f(x)\,dx.$$

Theorem III, applied to the left-hand integral in (36), leads to

Theorem IV. *Let* $f(x)$ *be any function such that all integrals* $\int_a^b p(x)f(x)x^i\,dx$ $(i=0,1,2,\ldots)$ *exist, with* $p(x)$ *satisfying* (13). *Consider the formal development*

$$(\alpha)\qquad f(x)\sim\sum_{i=0}^{\infty}{}' A_i\varphi_i(p;x) \quad \left(A_i=\int_a^b p(x)f(x)\varphi_i(p;x)\,dx\right).$$

---

[14]) Tchebycheff (Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approchée des fonctions, Collected Papers (in Russian) **1**, pp. 273–378; pp. 302–303) obtained almost identical results (with π replaced by 4). His method, however, requires the exact expression of the polynomial $x^n+\ldots$, deviating the last from zero in (a,b).

The inequalities given in Theorem III, *with* $q(x) \equiv 1$, $h = A_s a_s(p)$, *hold for* $\Pi(x) = \sum_{i=0}^{s}{}' A_i \varphi_i(p; x)$ *with arbitrary finite* s (> 0), *i. e.* $\Pi(x)$ *being any finite section* („*Abschnitt*“) *of* (α) *of degree* s (> 0).

Corollary. 1°. *The inequalities* $\int_a^b p(x) f(x)\, dx \gtrless 0$ *or* $\leqq 0$ *imply resp., for any finite section* $\Pi(x)$ *of* (α) *of degree* s (> 0),

$$\Pi_{\max} > \frac{1}{2}\left\{\Pi_{\min} + \sqrt{\Pi_{\min}^2 + \frac{4H}{Q^2}}\right\}, \qquad \Pi_{\min} < \frac{1}{2}\left\{\Pi_{\max} - \sqrt{\Pi_{\max}^2 + \frac{4H}{Q^2}}\right\}.$$

2°. *The inequalities*

$$Q_{\max} \leqq \frac{1}{2}\left\{Q_{\min} + \sqrt{Q_{\min}^2 + \frac{4H}{Q^2}}\right\}, \qquad Q_{\min} \geqq \frac{1}{2}\left\{Q_{\max} - \sqrt{Q_{\max}^2 + \frac{4H}{Q^2}}\right\},$$

where $Q(x)$ *is a certain* (*arbitrarily chosen*) *section of* (α) [15]), *imply resp.,*

$$\Pi_{\min} < \frac{1}{2}\left\{\Pi_{\max} - \sqrt{\Pi_{\max}^2 + \frac{4H}{Q^2}}\right\}, \qquad \Pi_{\max} > \frac{1}{2}\left\{\Pi_{\min} + \sqrt{\Pi_{\min}^2 + \frac{4H}{Q^2}}\right\}$$

for any other section $\Pi(x)$ *of* (α) [15]).

In fact, we have in this case resp.,

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx < 0, \qquad \int_a^b p(x) f(x)\, dx > 0.$$

§ 8.

A more precise form of Rolle's theorem for a special class of polynomials.

Let

$$t_n(x) = A_0 + A_1 \operatorname{Cos} x + A_2 \operatorname{Cos} 2x + \ldots + A_n \operatorname{Cos} n x$$

be a trigonometric cos.-sum of order n. The following theorem is due to S. Bernstein[16]):

If $\max |t_n'(x)| = M$, *then there exists at least one point* ξ *such that* $|t_n(\xi)| \geqq \frac{M}{n}$.

In the inequality

$$1 \geqq \frac{\left|\int_\alpha^\beta f'(x)\, dx\right|}{\int_\alpha^\beta |f(x)|\, dx} \geqq 0 \qquad (\alpha < \beta),$$

[15]) Of degree $s > 0$.

[16]) S. Bernstein, On the best approximation of continuous functions by means of polynomials of a given degree, Kharkoff (1912), pp. 1–153; p. 24 (in Russian).

let

$$f(x) \equiv t_n(x), \quad \text{with} \quad t_n(\alpha) = 0, \quad |t_n(\beta)| = \max |t_n(x)|.$$

This gives, making use of the theorem stated above,

$$1 \geqq \frac{\left|\int_\alpha^\beta t_n'(x)\,dx\right|}{\int_\alpha^\beta |t_n'(x)|\,dx} > \frac{\frac{M}{n}}{M(\beta-\alpha)},$$

$$\beta - \alpha > \frac{1}{n}. \tag{37}$$

On the other hand, the substitution $x = \operatorname{Cos} y$ gives,

$$G_n(x) \equiv t_n(y),$$

and we get from formula (37), applied to $G_n(x)$ with

$$G_n(\alpha) = 0, \quad |G_n(\beta)| = M[G_n; -1, 1],$$

$$|\arccos\alpha - \arccos\beta| > \frac{1}{n}. \tag{38}$$

Assume now

$$G_n(1) = G_n(-1) = 0.$$

Then, $G_n'(x)$ has one or more roots inside $(-1, 1)$, and if ξ is the root which gives $\max |G_n(x)|$ in $(-1, 1)$, then, according to (38),

$$\arccos\xi - \arccos 1 > \frac{1}{n}, \quad \arccos(-1) - \arccos\xi > \frac{1}{n}. \tag{39}$$

We can reduce any finite interval (a, b) to $(-1, 1)$, and the inequalities (39) thus transformed lead to

Theorem V. *If $G_n(a) = G_n(b)$, and $x = \xi$ $(a < \xi < b)$ is the root of $G_n'(x)$ giving the maximum of $|G_n(x) - G_n(a)|$ in (a, b), then*

$$b\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2n} + a\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2n} < \xi < b\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2n} + a\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2n}.$$

In particular, this inequality holds if $G_n'(x)$ has only one root between (a, b).

Corollary. *If all roots of $G_n(x)$ are real, then the root ξ of $G_n'(x)$ lying between two successive roots α, β of $G_n(x)$ satisfies the following inequality — a precised form of that given by Rolle's theorem:*

$$\beta\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2n} + \alpha\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2n} < \xi < \beta\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2n} + \alpha\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2n}.$$ [17] [18]

---

[17] Cf. loc. cit. [4], pp. 85—86.

[18] O. D. Kellog (On bounded polynomials in several variables, Math. Zeitschrift 27 (1927), pp. 55—64; p. 56) has obtained limits for coefficients of *bounded homogeneous* polynomials.

(Eingegangen am 11. November 1927.)

Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen.

Von

Kenjiro Shoda in Tokio.

In seiner Arbeit: Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen (Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. d. Wiss. 1926)[1] hat Herr Krull den Begriff der E.T.G. (Elementarteilergruppe) eingeführt und eine wichtige Beziehung zwischen den Automorphismen einer E.T.G. und der Ähnlichkeit der entsprechenden Matrix entwickelt. Auf Anregung von Frl. Noether sollen in der folgenden Arbeit die mit einer vorgegebenen Matrix vertauschbaren Matrizen in einem beliebigen Körper nach dem Krullschen Prinzip untersucht werden. Ich werde zunächst die Automorphismen einer E.T.G. betrachten. Die Gesamtheit der Automorphismen bildet durch passende Definition von Addition und Multiplikation einen Ring, den wir den Automorphismenring nennen. Die Untersuchung dieses Ringes wird durch den folgenden Krullschen Satz sehr vereinfacht: Eine E.T.G. läßt sich als direkte Summe von zyklischen Gruppen bzw. direkte Summe von E.T.G., deren Ordnungen Potenzen teilerfremder irreduziblen Polynome sind, darstellen. Dieser Satz entspricht dem bekannten Satz über endliche Abelsche Gruppen: Eine Abelsche Gruppe läßt sich als direktes Produkt von zyklischen Gruppen bzw. direktes Produkt von Abelschen Gruppen, deren Ordnungen Potenzen teilerfremder Primzahlen sind, darstellen. Ist nämlich eine E.T.G. die direkte Summe von E.T.G., deren Ordnungen Potenzen teilerfremder irreduzibler Polynome sind, so ist ihr Automorphismenring die direkte Summe derjenigen der einzelnen E.T.G.

Die Gesamtheit der mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen bildet einen Ring (zugeordneten Ring), der mit dem Automorphismenring der entsprechenden E.T.G. isomorph ist. Die Ergebnisse von § 1 werden in § 3 in die Theorie der Matrizen übertragen. Dabei erhalte ich das Haupt-

[1] Vgl. die Darstellung in: O. Haupt, Einführung in die Algebra, 2. Bd., Leipzig 1929, Nr. 23, 13 und 23, 14.

ergebnis von Frobenius in seiner Arbeit: Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen (Sitzungsberichte der Akad. der Wiss. zu Berlin, 1910). In § 2 werde ich die Eigenschaften des Automorphismenringes untersuchen. Die Ergebnisse dabei werden in § 4 in die Theorie der Matrizen übertragen. Ich beweise nämlich, daß die Gesamtheit der Polynome einer Matrix das Zentrum ihres zugeordneten Ringes bildet. Der entsprechende Satz für einen allgemeinen Matrizenring ist aber nicht richtig. Ist eine Matrix A ein Polynom einer anderen Matrix B und umgekehrt, so hat bekanntlich A und B denselben zugeordneten Ring. Sind A und B ähnlich, so sind die beiden zugeordneten Ringe isomorph. Der Umkehrungssatz ist aber auch richtig: Sind die beiden zugeordneten Ringe von A und B isomorph, so ist A mit einem Polynom von B und B mit einem Polynom von A ähnlich. Der zugeordnete Ring einer Matrix ist im allgemeinen nicht halbeinfach. Eine notwendige und hinreichende Bedingung wird gegeben dafür, daß er halbeinfach (als Matrizendarstellung vollständig reduzibel) ist.

Der Zentrumssatz besagt: Zwei zugeordnete Ringe von A und B sind dann und nur dann identisch, wenn A ein Polynom von B und B ein Polynom von A ist. Dadurch erhalte ich eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Matrizen als Polynome einer Matrix darstellbar sind. Ein Beispiel zeigt ferner: Es gibt zwei miteinander vertauschbare Matrizen, die durch keine Matrix darstellbar sind. Damit wird eine von Frobenius (Über vertauschbare Matrizen, Sitzungsberichte der Akad. der Wiss. zu Berlin, 1896) aufgeworfene Frage beantwortet. § 5. In § 6 werden die Ergebnisse der Arbeit von Herrn Stenzel: Über die Darstellung einer Matrix als Produkt von zwei symmetrischen Matrizen, usw. (Math. Zeitschr. **15** (1922)), die mit D. zitiert wird, einfacher und in einem beliebigen Körper bewiesen, während sie dort in einem algebraisch abgeschlossenen Körper gegeben werden. Unter einem Körper $\mathfrak{K}$ verstehen wir stets einen kommutativen Körper im Steinitzschen Sinne.

§ 1.

Automorphismenring einer Elementarteilergruppe.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine Abelsche Gruppe mit additiver Verknüpfung. Ein Symbol χ nennt man einen *Operator* von $\mathfrak{A}$, wenn für jedes Element a, a' von $\mathfrak{A}$ stets χa eindeutig definiert und in $\mathfrak{A}$ enthalten ist und $\chi(a + a') = \chi a + \chi a'$. Es sei $\{\chi_1, \chi_2, \ldots\}$ eine Menge von Operatoren von $\mathfrak{A}$ (die nicht abzählbar zu sein braucht). Diese Menge nennt man einen Operatorbereich von $\mathfrak{A}$. Zwei Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ nennt man *operatorisomorph erster Art*, wenn sie denselben Operatorbereich besitzen und wenn man jedem Element a_i von $\mathfrak{A}$ eineindeutig ein Element b_i von $\mathfrak{B}$ zuordnen kann, so

daß $a_i + a_j$, $b_i + b_j$ und χa_i, χb_i sich entsprechen. Ist die Zuordnung in einem Sinne eindeutig, so sagt man, daß $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *operatorhomomorph erster Art* sind. Zwei Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ heißen allgemeiner *operatorisomorph zweiter Art*, wenn jedem Operator χ von $\mathfrak{A}$ eineindeutig ein Operator θ von $\mathfrak{B}$ entspricht, so daß $a_i + a_j$, $b_i + b_j$ und χa_i, θb_i sich entsprechen.

Man kann jeden Operatorbereich zu einem Ring erweitern, wenn man die Addition bzw. Multiplikation von Operatoren durch $(\chi + \theta) a = \chi a + \theta a$ bzw. $(\chi\theta) a = \chi(\theta a)$ definiert, wo χ, θ Operatoren von $\mathfrak{A}$ sind, die aus den vorgegebenen Operatoren durch endlichmalige Additions- und Multiplikationsbildungen (die auch durch diese Formel definiert werden) abgeleitet sind. Die Subtraktion wird dann durch $(\chi - \theta) a = \chi a - \theta a$ definiert, da nach der Definition des Operators $\theta(a - a) = \theta \; 0 = 0$ und daher $\theta(-a) = -\theta a$ ist. Man nennt $\chi = \theta$, wenn für jedes a in $\mathfrak{A}$ stets $\chi a = \theta a$ ist. Insbesondere $\chi = 0$, wenn für jedes a stets $\chi a = 0$ ist.

Eine Gruppe $\mathfrak{A}$ heißt $\mathfrak{R}$-*Modul*, wenn jedes Element des Körpers $\mathfrak{R}$ ein Operator von $\mathfrak{A}$, insbesondere das Einheitselement von $\mathfrak{R}$ der Einheitsoperator E, und zwar für jedes α, β in $\mathfrak{R}$ stets $(\alpha + \beta) a = \alpha a + \beta a$ ist. Ein $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{A}$ endlichen Ranges mit einem in $\mathfrak{R}$ nicht enthaltenen Operator χ heißt E.T.G. (*Elementarteilergruppe*), wenn χ mit jedem Element von $\mathfrak{R}$ vertauschbar ist. Man erweitere den Operatorbereich zu einem Ring, den wir den Operatorbereich von $\mathfrak{A}$ nennen und mit $\mathfrak{r}(\chi)$ bezeichnen. Der Ring $\mathfrak{r}(\chi)$ ist dann gleich dem Polynombereich von χ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$. Da der Ring von $\mathfrak{A}$ endlich ist, so gibt es ein Polynom $f(x)$, so daß $f(\chi) = 0$ ist. Es sei $a(x)$ ein Polynom niedrigsten Grades unter diesen Polynomen, wobei der Koeffizient der höchsten Potenz von x das Einheitselement von $\mathfrak{R}$ ist. Dann ist $a(x)$ eindeutig bestimmt. Wäre nämlich $a'(x)$ ein anderes Polynom mit diesen Bedingungen, so müßte der Grad. von $a(x) - a'(x)$ niedriger als der von $a(x)$ und $a(\chi) - a'(\chi) = 0$ sein Das Polynom nennt man die *Ordnung* von $\mathfrak{A}$.

Ein Operator P einer E.T.G. $\mathfrak{A}$ heißt ein Automorphismus von $\mathfrak{A}$, wenn P mit $\mathfrak{R}$ elementweise vertauschbar ist und der Bedingung $\chi Pa = P\chi a$ genügt. Also: Ein Automorphismus ist ein Operator, der $\mathfrak{A}$ in eine operatorhomomorphe (erster Art) Untergruppe überführt; er heißt *eigentlich* oder *uneigentlich*, je nachdem die Abbildung einstufig oder mehrstufig ist. Die Gesamtheit der Automorphismen von $\mathfrak{A}$ bildet einen Ring, den wir den *Automorphismenring von* $\mathfrak{A}$ nennen. Denn die Summe bzw. das Produkt zweier Automorphismen ist wieder ein Automorphismus, da

$$\begin{aligned}(P + Q)(a + b) &= P(a + b) + Q(a + b) \\ &= Pa + Pb + Qa + Qb = (P + Q) a + (P + Q) b,\end{aligned}$$

$$\chi(P + Q) a = \chi Pa + \chi Qa = P\chi a + Q\chi a = (P + Q)\chi a.$$

Es sei $a(x) = \varphi_1(x)^{d_1}\varphi_2(x)^{d_2}\dots\varphi_t(x)^{d_t}$ die Ordnung von $\mathfrak{A}$, wobei die $\varphi_i(x)$ teilerfremde irreduzible Polynome bedeuten[2]). Man kann für diese E.T.G. $\mathfrak{A}$ im wesentlichen genau wie bei einer endlichen Abelschen Gruppe vorgehen und beweisen: $\mathfrak{A}$ *ist die direkte Summe* $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots + \mathfrak{A}_t$, wo $\mathfrak{A}_i$ eine E.T.G. von der Ordnung $\varphi_i(x)^{d_i}$ bedeutet. $\mathfrak{A}_i$ *wird durch jeden Automorphismus* P *in sich oder in eine Untergruppe übergeführt*, was symbolisch mit $P\mathfrak{A}_i \in \mathfrak{A}_i$ bezeichnet wird Denn aus $\varphi_i(\chi)^{d_i} a = 0$ folgt nach der Definition des Automorphismus $\varphi_i(\chi)^{d_i} Pa = 0$. *Der Automorphismenring* $\mathfrak{o}$ *von* $\mathfrak{A}$ *ist die direkte Summe der von* $\mathfrak{A}_i$. Denn ein Operator, der $\mathfrak{A}_i$ invariant läßt und die anderen $\mathfrak{A}_j$ alle in Null überführt, ist ein Automorphismus, der mit E_i bezeichnet wird. Die E_i genügen dann der Orthogonalitätsbedingung, d. h. $E_i^2 = E_i$, $E_i E_j = 0$ für $i \neq j$. Offenbar ist der Einheitsoperator $E = E_1 + \dots + E_t$ und E_i mit jedem Automorphismus P vertauschbar. Denn

$$E_i Pa = E_i(Pa_1 + \dots + Pa_t) = E_i Pa_i = Pa_i = PE_i a,$$

da $P\mathfrak{A}_i \in \mathfrak{A}_i$ ist. Daraus folgt, daß $\mathfrak{o}$ die direkte Summe von zweiseitigen Idealen $\mathfrak{o}E_i = E_i\mathfrak{o}$ ist. $\mathfrak{o}E_i$ ist aber mit dem Automorphismenring von $\mathfrak{A}_i$ isomorph (genauer ringisomorph), da $\mathfrak{o}E_i$ aus der Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{o}$ besteht, die jedes Element von $\mathfrak{A}_j$, $i \neq j$, in Null überführen.

$\mathfrak{A}$ *ist* (wie bei einer endlichen Abelschen Gruppe) *die direkte Summe* $\mathfrak{A}^{(1)} + \mathfrak{A}^{(2)} + \dots + \mathfrak{A}^{(m)}$, wo $\mathfrak{A}^{(i)}$ eine zyklische Gruppe ist, deren Ordnung $a_i(x)$ vom Grade k_i und durch $a_{i+1}(x)$ teilbar sei. Dabei verstehen wir unter einer zyklischen Gruppe eine E.T.G., die aus einem Element r durch den Operatorbereich $\mathfrak{r}(\chi)$ erzeugt wird. Das System $(a_1(x) \dots a_m(x))$ nennt man nach Herrn Krull die *Polynominvarianten* von $\mathfrak{A}$. Ausführlich kann man also jedes Element a von $\mathfrak{A}$ in der Gestalt

$$a = \sum_{i=1}^{m} g_i(\chi)\, r_i$$

schreiben, wo $g_i(x)$ ein Polynom des Grades $k_i - 1$ mit willkürlichen Konstantkoeffizienten ist. Dabei ist $a_i(\chi) r = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades vom Grade k_i, der χ für r genügt. r_i nennt man ein Basiselement von $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathfrak{r}(\chi)$.

Es sei P ein Operator von $\mathfrak{A}$ und $Pr_i = r_i^*$. Dann und nur dann ist P ein Automorphismus, wenn P mit $\mathfrak{R}$ elementweise vertauschbar und $a_i(\chi) r_i^* = 0$ ist. Es sei $r_i^* = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(\chi) r_j$, $i = 1, 2, \dots, m$. Die Bedingung $a_i(\chi) r_i^* = 0$ besagt, daß für $j < i$ stets $g_{ij}(x)$ durch $\frac{a_j}{a_i}(x)$ teilbar ist.

[2]) Im folgenden bedeutet $\varphi(x)$ bzw. $\varphi_i(x)$ stets ein irreduzibles Polynom.

Also wird P durch die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} h_{11}(\chi) & h_{12}(\chi) & h_{13}(\chi) \cdots \\ \frac{a_1}{a_2}(\chi) h_{21}(\chi) & h_{22}(\chi) & h_{23}(\chi) \\ \frac{a_1}{a_3}(\chi) h_{31}(\chi) & \frac{a_2}{a_3}(\chi) h_{32}(\chi) & h_{33}(\chi) \\ \vdots & & \end{pmatrix} \tag{1}$$

dargestellt, wo der Grad des Polynoms $h_{ij}(x)$ gleich der kleineren der beiden Zahlen $k_i - 1$, $k_j - 1$ ist und die Koeffizienten willkürliche Konstanten sind. *Die Anzahl der linear unabhängigen Automorphismen wird also durch* $k_1 + 3k_2 + 5k_3 + \ldots$ *gegeben.* Setzt man in P ein $h_{ij}(\chi) = E$ aber die anderen $h_{\alpha\beta}(\chi) = 0$, so möge man P_{ij} erhalten. P wird dadurch in der Gestalt

$$P = \sum h_{ij}(\chi) P_{ij} \tag{2}$$

ausgedrückt. Dabei bestehen die folgenden Beziehungen, falls $i \leqq j \leqq k$,

$$\begin{aligned} &P_{ij} P_{jk} = P_{ik} \qquad P_{kj} P_{ji} = P_{ki} \qquad P_{\varkappa\lambda} P_{\mu\nu} = 0, \quad \lambda \neq \mu \\ &P_{ik} P_{kj} = \frac{a_j}{a_k}(\chi) P_{ij} \qquad P_{jk} P_{ki} = \frac{a_j}{a_k}(\chi) P_{ji} \\ &P_{ji} P_{ik} = \frac{a_i}{a_j}(\chi) P_{jk} \qquad P_{ki} P_{ij} = \frac{a_i}{a_j}(\chi) P_{kj} \end{aligned} \tag{3}$$

Da der Automorphismenring $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{A}$ die direkte Summe derjenigen der einzelnen $\mathfrak{A}_i$ ist, so betrachten wir im folgenden eine E.T.G. $\mathfrak{A}$, deren Polynominvarianten $(\varphi(x)^{e_1}, \ldots, \varphi(x)^{e_m})$, $e_i \geqq e_{i+1}$, sind. Wir beweisen nun ein Kriterium für die Eigentlichkeit eines Automorphismus P. Dann und nur dann existiert der reziproke Automorphismus P^{-1} von P, wenn P eigentlich ist. Dann ist aber $PP^{-1} \equiv E \pmod{\varphi(\chi)}$. Daher ist die Determinante der Matrix P mit $\varphi(\chi)$ teilerfremd. Ist umgekehrt die Determinante von P mit $\varphi(\chi)$ teilerfremd, so ist ihre reziproke Matrix eine ganze Matrix modulo $\varphi(\chi)^{e_1}$.

Hilfssatz 1. *Ein Automorphismus einer E.T.G., deren Ordnung eine Potenz eines irreduziblen Polynoms* $\varphi(x)$ *ist, ist dann und nur dann eigentlich, wenn seine Determinante mit* $\varphi(\chi)$ *teilerfremd ist.*

Es sei $e_1 = \ldots = e_{k_1} > e_{k_1+1} = \ldots = e_{k_2} > \ldots > e_{k_{t-1}+1} = \ldots = e_m$. Durch Zusammenfassung der Koeffizienten in Teilmatrizen erhält man aus (1)

$$P = \begin{pmatrix} P'_{11} P'_{12} \ldots P'_{1t} \\ P'_{21} P'_{22} \ldots P'_{2t} \\ \vdots \\ P'_{t1} P'_{t2} \ldots P'_{tt} \end{pmatrix}$$

wo der Grad von P'_{ii} gleich $k_i - k_{i-1}$, $k_0 = 0$, ist. Die Koeffizienten von P'_{ij} sind für $i > j$ stets durch $\varphi(\chi)$ teilbar. Daher kann man den Hilfssatz 1 auch so aussprechen:

Hilfssatz 1a. *P ist dann und nur dann eigentlich, wenn die Determinante von P'_{ii} für jedes i mit $\varphi(\chi)$ teilerfremd ist.*

Es sei $\mathfrak{B}$ eine andere E.T.G. mit Polynominvarianten $(b_1(x), \ldots, b_{m'}(x))$. Ein Operator, der $\mathfrak{A}$ in eine mit $\mathfrak{B}$ operatorhomomorphe (erster Art) Untergruppe überführt, wird in einen Automorphismus von $\mathfrak{A}$ zurückgeführt, wenn $\mathfrak{B}$ gleich $\mathfrak{A}$ ist. Für diesen verallgemeinerten Operator kann man wie oben vorgehen. Ein Element $r_i^* = \sum g_{ij}(\chi) r_j$ entspricht dann und nur dann einem (im allgemeinen nicht minimalen) Basiselement (in bezug auf $\mathfrak{r}(\chi)$) einer homomorphen Untergruppe von $\mathfrak{B}$, wenn $b_i(\chi) r_i^* = 0$ ist. Es sei $d_{ij}(x)$ der größte gemeinsame Teiler von $a_j(x)$ und $b_i(x)$. Dann muß $g_{ij}(x)$ durch $\frac{a_j(x)}{d_{ij}(x)}$ teilbar sein.

$$r_i^* = \sum_{j=1}^{m} h_{ij}(\chi) \frac{a_j}{d_{ij}}(\chi) r_j .$$

Der Grad von $h_{ij}(x)$ ist gleich $k_{ij} - 1$, wo k_{ij} der Grad von $d_{ij}(x)$ ist. Daher hat $h_{ij}(x)$ genau k_{ij} willkürliche Konstanten. *Die Anzahl unserer linear unabhängigen Operatoren ist also gleich* $\sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{m} k_{ij}$.

§ 2.

Eigenschaften des Automorphismenrings.

Wir betrachten nun eine E.T.G., deren Ordnung eine Potenz eines irreduziblen Polynoms $\varphi(x)$ ist, was keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit ist. Wir beweisen:

Satz 1. *Das Zentrum des Automorphismenrings einer E.T.G. ist der Operatorbereich der Gruppe.*

Jedes Element des Automorphismenrings stellt sich in der Form $P = \sum h_{ij}(\chi) P_{ij}$ dar. Ist P mit P_{ii} für jedes i vertauschbar, so hat P die Gestalt $\sum h_{ii}(\chi) P_{ii}$. Denn $P P_{11} = P_{11} P P_{11} = h_{11}(\chi) P_{11}$, da $P_{11}^2 = P_{11}$ ist.

$$(P - \sum h_{ij}(\chi) P_{ij}) P_{11} = P P_{11} - \sum h_{i1}(\chi) P_{i1} = 0 .$$

Da $P P_{11} = h_{11}(\chi) P_{11}$ ist, so ist $\sum_{i=2}^{m} h_{i1}(\chi) P_{i1} = 0$ und daher für jedes $i \neq 1$ zugleich $h_{i1}(\chi) P_{i1} = 0$. Analog kann man beweisen, daß für jedes $i \neq 1$ stets $h_{1i}(\chi) P_{i1} = 0$ ist. P hat also die Gestalt $h_{11}(\chi) P_{11} + \sum_{i,j=2}^{m} h_{ij}(\chi) P_{ij}$.

Für $P^{(1)} = \sum_{i,j=2}^{m} h_{ij}(\chi) P_{ij}$ kann man genau wie oben vorgehen, usw. Ist P außerdem mit P_{a1} vertauschbar, so ist

$$h_{aa}(\chi) P_{a1} = h_{11}(\chi) P_{a1}.$$

D. h. $h_{aa}(x) \equiv h_{11}(x) \pmod{\varphi(x)^{e_a}}$ oder, was dasselbe ist,

$$h_{aa}(\chi) P_{aa} = h_{11}(\chi) P_{aa}.$$

Daher ist $P = h_{11}(\chi) \sum P_{ii} = h_{11}(\chi)$, da das Einheitselement von $\mathfrak{R}$ der Einheitsoperator ist. Damit ist der Satz bewiesen, da $h_{11}(\chi)$ nach der Definition des Automorphismus mit jedem P vertauschbar ist.

Es sei $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{A}_2$ eine E.T.G. mit Operatorbereich $\mathfrak{r}(\chi_1)$ bzw. $\mathfrak{r}(\chi_2)$ und Polynominvarianten $(\varphi_1(x)^{e_1}, \ldots, \varphi_1(x)^{e_m})$ bzw. $(\varphi_2(x)^{d_1}, \ldots, \varphi_2(x)^{d_n})$. *$\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ sind dann und nur dann operatorisomorph erster Art, wenn ihre Polynominvarianten übereinstimmen*[3]). Wir beweisen:

Hilfssatz 2. *$\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ sind dann und nur dann operatorisomorph zweiter Art, wenn für jedes i stets $e_i = d_i$, $m = n$ und $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ denselben Erweiterungskörper von $\mathfrak{R}$ bestimmen.*

Da $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1^{(1)} + \mathfrak{A}_1^{(2)} + \ldots + \mathfrak{A}_1^{(m)}$ bzw. $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2^{(1)} + \mathfrak{A}_2^{(2)} + \ldots + \mathfrak{A}_2^{(n)}$ ist, wo die Ordnung der irreduziblen zyklischen Gruppe $\mathfrak{A}_1^{(i)}$ bzw. $\mathfrak{A}_2^{(i)}$ durch die der $\mathfrak{A}_1^{(i+1)}$ bzw. $\mathfrak{A}_2^{(i+1)}$ teilbar ist, so sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ dann und nur dann operatorisomorph zweiter Art, wenn $m = n$ und $\mathfrak{A}_1^{(i)}$, $\mathfrak{A}_2^{(i)}$ für jedes i operatorisomorph zweiter Art sind. Der Hilfssatz ist aber klar für zyklische Gruppen. Damit ist der Satz bewiesen.

Nach der Definition des Automorphismus sind die Automorphismenringe $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$ von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ ringisomorph, wenn $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ operatorisomorph zweiter Art sind. Umgekehrt gilt:

Satz 2. *Sind die Automorphismenringe $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}_2$ zweier E.T.G. $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ ringisomorph, so sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ operatorisomorph zweiter Art.*

Der Ring $\mathfrak{o}_1$ bzw. $\mathfrak{o}_2$ ist eine E.T.G. mit Operatorbereich $\mathfrak{r}(\chi_1)$ bzw. $\mathfrak{r}(\chi_2)$. Sind $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$ ringisomorph, so sind ihre Zentren und daher nach Satz 1 die beiden Operatorbereiche $\mathfrak{r}(\chi_1)$, $\mathfrak{r}(\chi_2)$ ringisomorph. Daher sind $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$ als zwei E.T.G. mit Operatorbereiche $\mathfrak{r}(\chi_1)$, $\mathfrak{r}(\chi_2)$ operatorisomorph zweiter Art. Daraus ergibt sich der Operatorisomorphismus zweiter Art von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ wie folgt: $\mathfrak{o}_1$ bzw. $\mathfrak{o}_2$ — dieser aufgefaßt als E.T.G. — ist die direkte Summe

$$\sum \mathfrak{o}_{ij}^{(1)} \quad \text{bzw.} \quad \sum \mathfrak{o}_{ij}^{(2)},$$

wo $\mathfrak{o}_{ij}^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{o}_{ij}^{(2)}$ eine irreduzible zyklische Gruppe von der Ordnung $\varphi_1(x)^{e_\lambda}$ bzw. $\varphi_2(x)^{d_\lambda}$, $\lambda = \text{Max.}(i, j)$, ist, die durch Formel (2) § 1 definiert wird.

---

[3]) Dazu muß natürlich $\chi_1 = \chi_2$ sein. Vgl. Krull a. a. O., Satz 16.

Es sei $e_1 = \ldots = e_{k_1} > e_{k_1+1} = \ldots = e_{k_2} > \ldots > e_{k_{t-1}+1} = \ldots = e_{k_t}$, $k_t = m$ bzw. $d_1 = \ldots = d_{l_1} > d_{l_1+1} = \ldots = d_{l_2} > \ldots > d_{l_{s-1}+1} = \ldots = d_{l_s}$, $l_s = n$. In den Summanden $\mathfrak{o}_{ij}^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{o}_{ij}^{(2)}$ kommen genau k_1^2-mal bzw. l_1^2-mal die Gruppe von der Ordnung $\varphi_1(x)^{l_{k_1}}$ bzw. $\varphi_2(x)^{d_{l_1}}$ vor; $(k_i^2 - k_{i-1}^2)$-mal bzw. $(l_i^2 - l_{i-1}^2)$-mal die von der Ordnung $\varphi_1(x)^{e_{k_i}}$ bzw. $\varphi_2(x)^{d_{l_i}}$ vor. Nach Hilfssatz 2 ist also $e_i = d_i$, $k_1^2 = l_1^2$, $k_i^2 - k_{i-1}^2 = l_i^2 - l_{i-1}^2$ und $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ bestimmen denselben Erweiterungskörper von $\mathfrak{K}$. Daraus folgt aber für jedes i stets $k_i = l_i$. Nach Hilfssatz 2 erhält man Satz 2.

Wir beweisen:

Satz 3. *Der Automorphismenring einer E.T.G. $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann zweiseitig vollständig reduzibel — d. h. direkte Summe zweiseitig einfacher Ringe —, wenn die Ordnung von $\mathfrak{A}$ Produkt teilerfremder irreduzibler Polynome ist. Die Anzahl der zweiseitig einfachen Summanden ist gleich der Anzahl der verschiedenen irreduziblen Faktoren der Ordnung.*

Dabei verstehen wir unter einem *zweiseitig einfachen* Ring einen Ring, der außer dem Nullideal kein echtes zweiseitiges Ideal enthält. Zum Beweis genügt es, wie wir immer gesehen haben, zu zeigen: Der Automorphismenring $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{A}$, deren Ordnung eine Potenz eines irreduziblen Polynoms ist, ist dann und nur dann zweiseitig einfach, wenn die Ordnung irreduzibel ist. Ist $\varphi(x)^e$, $e > 1$, die Ordnung von $\mathfrak{A}$, so bildet die Gesamtheit der Automorphismen P, die der Bedingung $\varphi(\chi) P = 0$ genügen, ein echtes zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}$. Denn ist P^* ein beliebiger Automorphismus, so ist

$$\varphi(\chi) P^* P = P^* \varphi(\chi) P = 0 \qquad \varphi(\chi) P P^* = 0.$$

Aus $\varphi(\chi) P_1 = 0$, $\varphi(\chi) P_2 = 0$ folgt auch $\varphi(\chi)(P_1 - P_2) = 0$. Dieses Ideal ist ein vom Nullideal verschiedenes echtes Ideal, was aus $e > 1$ folgt. Denn $P_{11}(2)$ ist im Ideal nicht enthalten, da $\varphi(\chi) P_{11} \neq 0$ ist. $\varphi(\chi)^{e-1} P_{11} \neq 0$ ist aber im Ideal enthalten. Also ist die Bedingung notwendig. Sie ist aber auch hinreichend. Ist nämlich die Ordnung von $\mathfrak{A}$ irreduzibel, so ist nach (2), (3) $\mathfrak{o}$ das direkte Produkt des vollständigen Matrizenrings mit $\mathfrak{r}(\chi)$ und daher nach dem Maclagan Wedderburnschen Satz[4]) zweiseitig einfach, da $\mathfrak{r}(\chi)$ dann ein Körper ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Im allgemeinen ist der Automorphismenring nicht zweiseitig vollständig reduzibel (*halbeinfach*). Er besitzt ein *maximales nilpotentes Ideal*, das aus den Elementen von der Gestalt $\sum h_{ij}(\chi) \varphi_{ij}(\chi) P_{ij}$, $\varphi_{ij}(\chi) = \varphi(\chi)$

---

[4]) Maclagan Wedderburn, On hyperkomplex numbers, Proceedings of the London Math. Soc. **2** (1908), S. 6. Vgl. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, herausgegeben von Speiser, Zürich 1927, S. 120, 121.

für $e_i = e_j$, $\varphi_{ij}(\chi) = E$ für $e_i \neq e_j$, besteht, was daraus folgt, daß der Restklassenring nach dem Ideal die direkte Summe von zweiseitig einfachen Ringen, also halbeinfach ist.

§ 3.

Zugeordneter Ring einer Matrix.

Die Gesamtheit der Matrizen, die mit jedem Element eines Matrizenringes vertauschbar sind, bildet einen Ring, den wir nach Herrn Schur den *zugeordneten Ring* des Matrizenringes nennen. Die sämtlichen Polynome einer Matrix A bilden einen Ring, der mit $\mathfrak{r}(A)$ bezeichnet wird. Den zugeordneten Ring von $\mathfrak{r}(A)$ nennt man einfach den zugeordneten Ring von A, der bekanntlich aus der Gesamtheit der Matrizen besteht, die mit A vertauschbar sind.

Herr Krull hat eine Beziehung zwischen E.T.G. und Matrizen eingeführt. Es sei nämlich $\mathfrak{A}$ eine E.T.G., deren Basiselemente in bezug auf $\mathfrak{K}$ gleich $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sind. Nach der Definition der E.T.G. gilt dann für den Operator χ von $\mathfrak{A}$

$$\chi\,\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\varepsilon_j, \tag{4}$$

wo a_{ij} Elemente von $\mathfrak{K}$ sind. Ordnet man dem Operator χ die Matrix $A = (a_{ij})$ zu, so erkennt man leicht, daß dem Operator $f(\chi)$ die Matrix $f(A)$ entspricht. *Also ist* $\mathfrak{r}(A)$ *eine Darstellung des Operatorbereiches* $\mathfrak{r}(\chi)$, *und zwar eine isomorphe Darstellung*, denn es ist $f(A) = 0$ dann und nur dann, wenn für jedes ε_i stets $f(\chi)\,\varepsilon_i = 0$ ist. Dann ist aber $f(x)$ durch die Ordnung von $\mathfrak{A}$ teilbar. Ist umgekehrt eine Matrix A des Grades n vorgegeben, so kann man n Basiselemente $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ und einen Operator χ bestimmen, so daß A wie oben dem Operator χ und daher $\mathfrak{r}(A)$ dem Operatorbereich $\mathfrak{r}(\chi)$ entspricht.

Es sei $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$, deren Basiselemente in bezug auf $\mathfrak{K}$ gleich $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \ldots, \varepsilon_{n'}^*$ sind und

$$\varepsilon_i^* = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,\varepsilon_j, \tag{5}$$

$$\chi\,\varepsilon_i^* = \sum_{j=1}^{n'} b_{ij}\,\varepsilon_j^*. \tag{6}$$

Dann folgt, wenn man (5) mit χ multipliziert und mit (6) vergleicht,

$$(b_{ij})(p_{ij}) = (p_{ij})(a_{ij}) \quad \text{oder kurz} \quad BP = PA. \tag{7}$$

Wenn man also den beiden E.T.G. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit Operator χ die beiden Matrizen A und B zuordnet, so entspricht der Basistransformation eine Matrix P, die der Bedingung (7) genügt. Umgekehrt, wenn P der Glei-

chung (7) genügt, so ist die durch (5) definierte Gruppe eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft (6).

Eine Spezialisierung ist der Fall, wo $A = B$ ist. Dann bedeutet P einen *Automorphismus* von $\mathfrak{A}$, da dann $\mathfrak{B}$ eine homomorphe (erster Art) Untergruppe von $\mathfrak{A}$ ist. Anderseits ist P dann mit A vertauschbar. Also wird das Problem, die sämtlichen mit A vertauschbaren Matrizen zu bestimmen, in das Problem reduziert, die Gesamtheit der Automorphismen von $\mathfrak{A}$ zu bestimmen. *Der zugeordnete Ring von A ist daher offenbar mit dem Automorphismenring von $\mathfrak{A}$ ringisomorph.*

Eine andere Spezialisierung ist der Fall, wo $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ (mengentheoretisch) ist. Dann ist $n = n'$ und die Determinante von P von Null verschieden und $B = PAP^{-1}$. Also entspricht einer eigentlichen Basistransformation von $\mathfrak{A}$ eine *ähnliche* Transformation von A. Die Umkehrungen dieser beiden spezialisierten Behauptungen sind auch richtig.

Man kann $\mathfrak{A}$, wie wir in § 1 gesehen haben, in die Form $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_t$ bringen (d. h. durch passende eigentliche Basistransformation), wo die Ordnung von $\mathfrak{A}_i$ gleich $\varphi_i(x)^{d_i}$ ist. Entsprechend wird A ähnlich in die Form

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_t \end{pmatrix}$$

transformiert, wo die charakteristische Determinante von A_i gleich einer Potenz von $\varphi_i(x)$ ist. Denn $\chi\mathfrak{A}_i$ ist in $\mathfrak{A}_i$ enthalten (vgl. (4)). Jedes Element R des zugeordneten Ringes von A hat dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_t \end{pmatrix}$$

wo R_i eine mit A_i vertauschbare Matrix ist. Denn $\mathfrak{A}_i$ wird durch jeden Automorphismus in sich transformiert (vgl. (5)).

Man kann $\mathfrak{A}$, wie wir in § 1 gesehen haben, in die Form $\mathfrak{A}^{(1)} + \mathfrak{A}^{(2)} + \ldots + \mathfrak{A}^{(m)}$ bringen, wo $\mathfrak{A}^{(i)}$ eine zyklische Gruppe von der Ordnung $a_i(x)$ ist. Dabei seien die Basiselemente in bezug auf $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{A}^{(i)}$ nach der Reihenfolge $Er_i, \chi r_i, \ldots, \chi^{k_i-1} r_i$ geordnet. Durch die entsprechende ähnliche Transformation wird A in die *Krullsche Normalform*[5]

[5]) Zuerst hat Herr Krull diese Normalform rechnerisch eingeführt (Über Begleitmatrizen und Elementarteilertheorie, Dissertation zu Freiburg i. Br. 1921). Nachher hat er a. a. O. wie hier eine gruppentheoretische Einführung gebracht.

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} A^{(1)} & & & \\ & A^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A^{(m)} \end{pmatrix} \qquad A^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & 1 \\ h_{k_i} & h_{k_i-1} & & & h_1 \end{pmatrix}$$

übergeführt, wo die charakteristische Determinante der Loewyschen Begleitmatrix $A^{(i)}$ gleich $a_i(x)$ ist. *$a_i(x)$ ist dann gleich dem i-ten Elementarteiler von $|xE - A|$*, was man leicht nachweisen kann.

Da der zugeordnete Ring von A mit dem Automorphismenring von $\mathfrak{A}$ ringisomorph ist, so ist *die Anzahl der linear unabhängigen mit A vertauschbaren Matrizen gleich $k_1 + 3k_2 + 5k_3 + \dots$*. Die Struktur des Automorphismenrings in § 1 lehrt uns, daß jedes Element R des zugeordneten Rings von A in der Form

$$R = \sum h_{ij}(A) R_{ij}$$

ausgedrückt wird, wo R_{ij} die dem Automorphismus P_{ij} (2) entsprechende Matrix bedeutet. Dabei bestehen die Beziehung (3), wo man P_{ij} bzw. χ durch R_{ij} bzw. A ersetzt[6]).

Im allgemeinen beweisen wir[7]):

Satz 4. *Sind $a_1(x), \dots, a_m(x)$ und $b_1(x), \dots, b_m(x)$ die Elementarteiler der beiden charakteristischen Determinanten von A und B, so ist die Anzahl der linear unabhängigen Matrizen P, die der Gleichung $BP = PA$ genügt, gleich $\sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{m} k_{ij}$, wo k_{ij} den Grad des größten gemeinsamen Teilers von $a_j(x)$ und $b_i(x)$ bedeutet.*

Dieser Satz folgt aus dem Ergebnis am Schluß von § 1. Denn einem solchen P entspricht, wie wir gesehen haben, ein Operator, der $\mathfrak{A}$ in eine mit $\mathfrak{B}$ operatorhomomorphe (erster Art) Untergruppe überführt und umgekehrt.

§ 4.

Eigenschaften des zugeordneten Rings einer Matrix.

Es sei $\mathfrak{r}'$ der zugeordnete Ring eines Matrizenrings $\mathfrak{r}$. Der zugeordnete Ring $\mathfrak{r}''$ von $\mathfrak{r}'$ enthält $\mathfrak{r}$ als einen Unterring. Wenn $\mathfrak{r}''$ mit $\mathfrak{r}$ übereinstimmt, so nennt man $\mathfrak{r}$ einen *vollständigen* Ring.

Satz 5. *Ein Ring ist dann und nur dann vollständig, wenn er der zugeordnete Ring eines Rings ist.*

Denn ist $\mathfrak{r}$ ein vollständiger Ring, so ist $\mathfrak{r}$ der zugeordnete Ring von $\mathfrak{r}'$. Ist umgekehrt $\mathfrak{r}$ der zugeordnete Ring von $\mathfrak{r}^{(0)}$, so folgt aus $\mathfrak{r}' \ni \mathfrak{r}^{(0)}$ offenbar $\mathfrak{r}'' \in \mathfrak{r}$. Anderseits ist $\mathfrak{r}'' \ni \mathfrak{r}$ und daher $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}''$.

[6]) Frobenius, Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen, § 2.

[7]) Frobenius, [6]) § 4.

Im allgemeinen enthält $\mathfrak{r}''$ den Ring $\mathfrak{r}$ als einen echten Unterring. Ebenso enthält das Zentrum $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}'}$ von $\mathfrak{r}'$ das Zentrum $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}$ von $\mathfrak{r}$. Denn $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}'}$ bzw. $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}$ ist der Durchschnitt $[\mathfrak{r}', \mathfrak{r}'']$ bzw. $[\mathfrak{r}', \mathfrak{r}]$. Wenn $\mathfrak{r}$ ein vollständiger Ring ist, so ist offenbar $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}'} = \mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}$. Im allgemeinen kann $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}'}$ aber, wie das folgende Beispiel[8]) zeigt, von $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}$ verschieden sein. Es sei $\mathfrak{r}$ ein Ring, der aus der Gesamtheit der Matrizen

$$\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ w & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & x & y \end{pmatrix}$$

besteht, wo u, v, w, x, y beliebige Zahlen sind. $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}}$ bzw. $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{r}'}$ besteht dann aus den Matrizen von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} r & & & \\ & r & & \\ & & r & \\ & & & r \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} s & & & \\ & s & & \\ & & t & \\ & & & t \end{pmatrix}$$

Es gilt aber nach Satz 1:

Satz 1a. *$\mathfrak{r}(A)$ ist ein vollständiger Ring, der das Zentrum seines zugeordneten Rings ist.*

Wir betrachten wie immer eine Matrix A bzw. eine E.T.G. $\mathfrak{A}$, deren Elementarteiler bzw. Polynominvarianten $(\varphi(x)^{e_1}, \ldots, \varphi(x)^{e_m})$ sind. Zwei Matrizen A_1, A_2 sind dann und nur dann ähnlich, wenn die entsprechende $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ operatorisomorph erster Art sein können[9]). Wir beweisen:

Hilfssatz 2a. *Dann und nur dann ist A_1 mit einem Polynom von A_2, A_2 mit einem Polynom von A_1 ähnlich, wenn $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ operatorisomorph zweiter Art sind.*

Zum Beweis genügt es zu zeigen: Dann und nur dann ist $\mathfrak{r}(A) = \mathfrak{r}(f(A))$, wenn die $f(A)$ entsprechende E.T.G. $\mathfrak{A}'$ mit $\mathfrak{A}$ operatorisomorph zweiter Art ist. Es ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(1)} + \mathfrak{A}^{(2)} + \ldots + \mathfrak{A}^{(m)}$. Entsprechend wird A in der Form (8) dargestellt. Dann und nur dann ist $\mathfrak{r}(A) = \mathfrak{r}(f(A))$, wenn für jedes i stets $\mathfrak{r}(A^{(i)}) = \mathfrak{r}(f(A^{(i)}))$ ist. Anderseits ist $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^{(1)'} + \mathfrak{A}^{(2)'} + \ldots + \mathfrak{A}^{(n)'}$ dann und nur dann mit $\mathfrak{A}$ operatorisomorph zweiter Art, wenn $m = n$ und $\mathfrak{A}^{(i)'}$, $\mathfrak{A}^{(i)}$ operatorisomorph zweiter Art sind. Der Hilfssatz ist aber für eine zyklische Gruppe klar. Damit ist der Satz bewiesen. Durch Zusammenfassung mit Satz 2 erhält man:

---

[8]) Diese Bemerkung verdanke ich Herrn Schur.

[9]) Krull, a. a. O. Satz 22.

Satz 2a. *Die zugeordneten Ringe zweier Matrizen A_1, A_2 sind dann und nur dann ringisomorph, wenn A_1 mit einem Polynom von A_2 und A_2 mit einem Polynom von A_1 ähnlich ist*[10]).

Ein Matrizenring heißt im Sinne der Darstellung *zerfallend*, wenn er mit einem Matrizenring äquivalent ist, dessen Elemente die Gestalt $\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ haben.

Hilfssatz 3. *Der zugeordnete Ring einer Matrix, deren charakteristische Determinante eine Potenz eines irreduziblen Polynoms ist, ist im Sinne der Darstellung nicht zerfallend.*

Wenn der zugeordnete Ring von A im Sinne der Darstellung zerfallend, und zwar jedes Element des Rings die Gestalt $\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ hat, so hat A auch die Gestalt $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, da A im Ring enthalten ist. Eine Matrix $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$ ist aber dann und nur dann mit A vertauschbar, wenn $A_1 P_{11} = P_{11} A_1$, $A_1 P_{12} = P_{12} A_2$, $A_2 P_{22} = P_{22} A_2$, $A_2 P_{21} = P_{21} A_1$ ist. Die Gleichungen $A_1 P_{12} = P_{12} A_2$, $A_2 P_{21} = P_{21} A_1$ sind aber dann und nur dann durch $P_{12} \neq 0$, $P_{21} \neq 0$ auflösbar, wenn die charakteristischen Determinanten von A_1, A_2 nicht teilerfremd sind, da im Satz 4 dann $\sum \sum k_{ij}$ von Null verschieden ist. Bei unserem Falle ist aber $P_{12} = 0$, $P_{21} = 0$. Daraus folgt, daß die charakteristischen Determinanten von A_1, A_2 teilerfremd sind. Der Umkehrungssatz ist auch nach oben klar. Wir beweisen nun:

Satz 3a. *Ein zugeordneter Ring einer Matrix A ist dann und nur dann im Sinne der Darstellung vollständig reduzibel, wenn die charakteristische Determinante von A lauter irreduzible Elementarteiler hat. Die Anzahl der irreduziblen Bestandteile ist gleich der Anzahl der verschiedenen irreduziblen Faktoren.*

Zum Beweis betrachten wir wie immer eine Matrix A, deren charakteristische Determinante eine Potenz eines irreduziblen Polynoms ist. Wir beweisen: Der zugeordnete Ring $\mathfrak{o}$ von A ist dann und nur dann im Sinne der Darstellung irreduzibel, wenn die Ordnung von $\mathfrak{A}$ irreduzibel ist oder nach Satz 3, wenn $\mathfrak{o}$ zweiseitig einfach ist. Es gilt aber allgemein[11]): *Ein Ring hyperkomplexer Zahlen ist dann und nur dann zweiseitig einfach, wenn er mit einem irreduziblen Matrizenring isomorph ist.* Also ist die

[10]) Die Beziehung zwischen den Elementarteilern von $xE - A_1$ und $xE - A_2$ wird nach Hilfssatz 2a durch Hilfssatz 2 gegeben.

[11]) Diesen Satz verdanke ich der Noetherschen Vorlesung im Wintersemester 1927/28 an der Universität zu Göttingen, die später publiziert wird. Dieser Satz geht in den bekannten Burnsideschen Satz über, wenn der Koeffizientenbereich ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Ein zweiseitig einfacher Ring $\mathfrak{o}$ kann mit einem im Sinne der Darstellung zerfallenden Matrizenring isomorph sein, dessen irreduzible Bestandteile $\mathfrak{o}_i$ miteinander äquivalent sind.

Bedingung notwendig. Sie ist auch hinreichend. Denn $\mathfrak{o}$ ist im Sinne der Darstellung vollständig reduzibel, wenn $\mathfrak{o}$ zweiseitig einfach ist. Nach Hilfssatz 3 ist er aber nicht zerfallend, also ist er irreduzibel.

§ 5.

Darstellung zweier Matrizen als Polynome einer Matrix.

Wir machen jetzt eine Anwendung von Satz 1a auf eine Frobeniussche Frage[12]) über vertauschbare Matrizen. „*Sind zwei miteinander vertauschbare Matrizen A und B stets als Polynome einer Matrix C darstellbar?*“

Wenn A durch C darstellbar ist, so ist $\mathfrak{r}(A)$ in $\mathfrak{r}(C)$ enthalten. Also ist der zugeordnete Ring $\mathfrak{c}$ von C im zugeordneten Ring $\mathfrak{a}$ von A enthalten. Ist umgekehrt $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{a}$ enthalten, so ist $\mathfrak{r}(A)$ in $\mathfrak{r}(C)$ enthalten, da $\mathfrak{r}(A)$ bzw. $\mathfrak{r}(C)$ der zugeordnete Ring von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{c}$ ist. (Satz 1a.)

Satz 4. *Zwei Matrizen A und B sind dann und nur dann als Polynome einer Matrix C darstellbar, wenn der Durchschnitt der beiden zugeordneten Ringe von A und B den zugeordneten Ring von C enthält.*

Sind nämlich A und B durch C darstellbar, so ist $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{a}$ und in $\mathfrak{b}$ und daher im Durchschnitt $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ enthalten. Ist umgekehrt $\mathfrak{c}$ in $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ enthalten, so ist $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{a}$ und in $\mathfrak{b}$ enthalten. Daraus folgt, daß A und B durch C darstellbar ist.

Nach diesem Satz zeigen wir, daß zwei Matrizen A und B miteinander vertauschbar sein können, auch wenn sie durch eine Matrix nicht darstellbar sind. Setzt man nämlich[13])

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jede mit A bzw. B vertauschbare Matrix hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} u & x_{12} & x_{13} \\ 0 & u & 0 \\ 0 & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & v & x_{23} \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}$$

Jedes Element des Durchschnitts $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ hat die Gestalt

$$F = \begin{pmatrix} w & x & y \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} = wE + xA + yB.$$

---

[12]) Frobenius, Über vertauschbare Matrizen, Einleitung.

[13]) Frobenius hat in seiner Arbeit [12]) dieses Beispiel gegeben. Dadurch hat er aber nur gezeigt, daß es kein Polynom C von A und B gibt, so daß A und B Polynome von C sind.

$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ ist also der durch A und B erzeugte Ring. Wäre C eine Matrix, die A und B darstellt, so müßte $\mathfrak{r}(C)$ den Ring $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ enthalten und $\mathfrak{c}$ in $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ enthalten sein. Daraus folgt $\mathfrak{r}(C) = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ und $C = aA + bB + cE$. Jede Funktion von C ist aber von der Form $pE + qC$.

§ 6.

Beweise von Stenzelschen Sätzen.

Wir beweisen nun die Sätze von Herrn Stenzel durch Benutzung unserer Theorie. Fortan betrachten wir stets die Krullsche Normalform, was, wie man leicht erkennen kann, keine Beschränkung der Allgemeinheit ist. A' sei die transponierte Matrix von A. Die Begleitmatrix A_i (8) wird durch die symmetrische Matrix [14])

$$S_i = \begin{pmatrix} -h_{k_i-1} & -h_{k_i-2} & \cdots & 1 \\ -h_{k_i-2} & -h_{k_i-3} & \cdots 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ -h_1 & 1 & & \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

in A_i' transformiert. Daraus folgt:

Satz 5. *Es gibt stets eine symmetrische Matrix S mit nicht verschwindender Determinante, die der Gleichung $SA = A'S$ genügt.*

Da die Determinante von S von Null verschieden ist, so ist $X = SR$ die allgemeinste Matrix, die der Gleichung $XA = A'X$ genügt, wo R die allgemeinste der mit A vertauschbaren Matrizen ist. Wir betrachten nun eine Matrix A, so daß $\varphi(A)^e = 0$, und bestimmen die allgemeinste symmetrische bzw. alternierende Lösung von $XA = A'X$. Da $SA = A'S$ ist, so ist $S^{-1}R'S$ mit A vertauschbar. Aus § 3 folgt daher

$$(9) \qquad S^{-1}R_{ij}'S = \Psi_{ji}(A)R_{ji}, \qquad R_{ii}' = R_{ii}, \qquad R_{ii}S = SR_{ii}.$$

Wir suchen eine symmetrische Matrix S^*, die der Bedingung $S^{*-1}R_{ij}'S^* = R_{ji}$ auch genügt. $R_{ij}^* = S^{-1}R_{ij}'S$ genügt den Beziehungen (3), wo man χ bzw. P_{ij} durch A bzw. R_{ij} ersetzt und in der linken Seite die beiden Faktoren umtauscht. $\Psi_{ij}(x)$ ist also mit $\varphi(x)$ teilerfremd. Daher kann man durch die Gleichung

$$\Psi_{ij}(x)h_j(x) + \varphi(x)^e g(x) = h_i(x)$$

---

[14]) Dazu braucht man nicht anzunehmen, daß die charakteristische Determinante von A eine Potenz eines irreduziblen Polynoms ist. Einer Begleitmatrix entspricht eine zyklische Gruppe von der Ordnung $a_i(x) = f(x)$. Man bilde $f(x) = f_0(x)$, $f_1(x), \ldots, f_{k_i}(x) = 1$, so daß $xf_j(x) = f_{j-1}(x) + h_{k_i+j-1}$ und nehme $f_1(\chi)r_i, \ldots, f_{k_i}(\chi)r_i$ als neue Basis. Dieser Basistransformation entspricht die ähnliche Transformation durch die Matrix S_i.

die Matrix $h_i(A)$, $|h_i(A)| \neq 0$, so bestimmen, daß

$$\Psi_{ij}(A) R_{ij} = h_i(A) h_j(A)^{-1} R_{ij}$$

ist. Man setze nun

$$S^* = S \sum h_i(A) R_{ii}.$$

Da $SA = A'S$ ist, so ist S^* symmetrisch. Es ist ferner $S^*A = A'S^*$, $|S^*| \neq 0$, da $|h_i(A)| \neq 0$ ist. Diese Matrix S^* hat also die verlangte Eigenschaft. Es sei nun

$$Q = S^* \sum g_{ij}(A) R_{ij}, \qquad Q' = \varepsilon Q, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Dann ist, da $S^* R_{ij} S^{*-1} = R'_{ji}$ ist,

$$\varepsilon \sum g_{ij}(A) R_{ij} = \sum g_{ij}(A) S^{*-1} R'_{ij} S^*, \qquad \sum g_{ij}(A)(\varepsilon R_{ij} - R_{ji}) = 0.$$

Hilfssatz 4. *Jede symmetrische bzw. alternierende Lösung der Gleichung $XA = A'X$ wird durch eine symmetrische Matrix S^* mit nicht verschwindender Determinante in der Form*

$$S = S^* \sum_{i \geqq j} g_{ij}(A)(R_{ij} + R_{ji}) \quad \text{bzw.} \quad T = S^* \sum_{i > j} g_{ij}(A)(R_{ij} - R_{ji})$$

dargestellt.

Nach Hilfssatz 1a § 1 folgt nun unmittelbar:

Satz 6. *Die Gleichung $TA = A'T$ besitzt dann und nur dann eine alternierende Lösung T von nicht verschwindender Determinante, wenn die Elementarteiler von $xE - A$ paarweise auftreten.* (D. Satz 2.)

Aus Satz 5 bzw. 6 folgt:

Satz 5a. *Jede Matrix ist als Produkt von zwei symmetrischen Matrizen darstellbar, deren eine eine von Null verschiedene Determinante besitzt.* (D. Satz 5.)

Satz 6a. *Eine Matrix ist dann und nur dann als Produkt von zwei alternierenden Matrizen darstellbar, deren eine eine von Null verschiedene Determinante besitzt, wenn alle Elementarteiler von $xE - A$ paarweise auftreten.* (D. Satz 6.)

Denn $(A'S)' = SA$ ist symmetrisch und $A = S \cdot A'S$. $(A'T)' = -TA$ ist alternierend und $A = T \cdot A'T$.

Nach einem Satz von Herrn Krull (a. a. O. Satz 27) folgt, wie er dort bemerkt hat: Es sei $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $xE - A_1$ habe die Elementarteiler $x^{r_1}, \ldots, x^{r_s}$. Dann gehören zu $xE - A$ die Elementarteiler $x^{r_1'}, \ldots, x^{r_s'}$, wobei r_i' gleich r_i oder $r_i + 1$ ist. Jeder irreduzible Faktor der Elementarteiler von $xE - A_1$, der nicht x ist, ist auch ein Faktor der von $xE - A$, und zwar derselben Potenz (D. Sätze 3, 4.) Da Satz 6a in einem beliebigen Körper gilt, so folgt, wie Herr Stenzel bewiesen hat,

Satz 6b. *Eine Matrix läßt sich dann und nur dann als Produkt von zwei alternierenden Matrizen darstellen, wenn die Elementarteiler von $xE - A$ folgende Bedingung erfüllen:* 1. *Jeder Faktor, der durch x nicht teilbar ist, tritt paarweise auf.* 2. *Alle Elementarteiler zur Basis x lassen sich zu Paaren von der Form (x^i, x^i) oder (x^i, x^{i+1}) zusammenfassen. Dazu kann noch ein x auftreten.* (D. Satz 7.)

Wir beweisen nun:

Satz 7b. *Eine Matrix läßt sich dann und nur dann als Produkt $T \cdot S$ $(S \cdot T)$ darstellen, wenn die Koeffizienten von $x^{2\nu+1}$ oder $x^{2\nu}$ der der Elementarteiler von $xE - A$ alle Null sind.* (D. Satz 8.)

Diese Bedingung ist, wie Herr Stenzel gezeigt hat, notwendig. Daß sie hinreichend ist, folgt so[15]): Man kann wie S_i in Satz 5 eine Matrix $\bar{S}_i$ bestimmen[16]), so daß $\bar{S}_i A_i = -A_i' \bar{S}_i$, da $h_{2j+1} = 0$, $j = 0, 1, \ldots$, ist. Dabei ist $\bar{S}_i$ symmetrisch oder alternierend, je nachdem der höchste Exponent von x in $a_i(x)$ ungerade oder gerade ist. Es gilt aber $(A_i' \bar{S}_i)' = \bar{S}_i' A_i$. Daher ist $A_i' \bar{S}_i$ symmetrisch oder alternierend, je nachdem $\bar{S}_i$ alternierend oder symmetrisch ist. Es gilt nun $A_i = -\bar{S}_i^{-1} \cdot A_i' \bar{S}_i$. Wenn aber $A = TS$ bzw. $A = ST$ ist, so ist $A = S^* T^*$ bzw. $A = T^* S^*$, da $A = TS$, $A' = ST'$ ähnlich sind. Daher kann $A_i = S_i T_i$ bzw. $A_i = T_i S_i$ für jedes i sein, womit der Satz bewiesen ist. Um die Theorie zu vervollständigen, beweisen wir:

Satz 7a. *Eine Matrix A läßt sich dann und nur dann als Produkt TS (ST), $|S| \neq 0$ bzw. $|T| \neq 0$, darstellen, wenn außer der Bedingung von Satz 7 die Elementarteiler x^{2i} bzw. x^{2i+1} paarweise auftreten.*

Ist $A = ST$, $|S| \neq 0$ bzw. $|T| \neq 0$, so ist $S^{-1}(xS - T)$ bzw. $(xT - S)T^{-1}$ gleich $xE - A$. Daher ist die Bedingung nach einem Satz über Elementarteiler[17]) notwendig. Zum Beweis, daß sie hinreichend ist, genügt es, den Satz für eine Matrix A zu beweisen, deren charakteristische Determinante $x^{2\nu}$ bzw. $x^{2\nu+1}$ ist. Nach dem Beweis von Satz 7b weiß man, daß A durch ST, $|S| \neq 0$ bzw. $|T| \neq 0$ dargestellt wird, wenn A eine Begleitmatrix ist. Ist aber $\bar{A} = \bar{S}\bar{T} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$, so ist $\bar{A} = \bar{T}\bar{S} = \begin{pmatrix} 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ -T_1 & 0 \end{pmatrix}$. Also folgt aus $\bar{A} = \bar{S}\bar{T}$, $|\bar{S}| \neq 0$ bzw. $|\bar{T}| \neq 0$, auch $\bar{A} = \bar{T}\bar{S}$, $|\bar{T}| \neq 0$ bzw. $|S| \neq 0$. Damit ist der Satz bewiesen.

---

[15]) Im folgenden betrachten wir eine allgemeine Matrix A.

[16]) Dazu müssen wir die Beziehung in [14]) durch $x f_j(x) = -f_{j-1}(x) - h_{k_i - j+1}$ ersetzen, was möglich ist, da $h_{2j+1} = 0$, $j = 1, 2, \ldots$.

[17]) Muth, Theorie und Anwendung der Elementarteiler, Leipzig, 1899, S. 232.

(Eingegangen am 22. Dezember 1927.)

Knoten und Verkettungen.

Von

Kurt Reidemeister in Königsberg.

Einleitung.

Man kann die Gruppe eines Knotens bekanntlich nicht nur als die Fundamentalgruppe seines Außenraumes $\mathfrak{A}$, sondern auch als System von Bedingungen für die Bildung gewisser (nämlich unverzweigter) Überlagerungen $\mathfrak{U}$ dieses Außenraumes auffassen.

Enthält ein euklidischer Raum eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve $\mathfrak{C}$, und ist Z der Halbzylinder, der von einem längs $\mathfrak{C}$ parallel verschobenen Halbstrahl überstrichen wird, so besitzt Z im allgemeinen Doppelachsen, längs denen der Zylinder sich selbst durchsetzt, und wir wollen annehmen, daß sie sämtlich nur zweifache Doppelachsen sind, und daß die Zylinderfläche durch dieselben in endlich viele Stücke $Z_1, \ldots, Z_n$ zerlegt wird, die also je von zwei Doppelachsen und einem Stück der Kurve $\mathfrak{C}$ begrenzt werden. Der Raum werde nun längs dieses Zylinders aufgeschnitten und dadurch in eine Zelle Z verwandelt, deren Berandung aus dem doppelt überdeckten Zylinder Z besteht. Die Berandung wird durch $\mathfrak{C}$ in zwei Stücke, Z_l und Z_r, und mit Hilfe der nun vierfach überdeckten Doppelachsen in die Flächenstücke $Z_{l\varrho}$, $Z_{r\varrho}$, $(\varrho = 1, \ldots, n)$ zerlegt. Sind nun $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots$ endlich oder abzählbar unendlich viele zu Z kongruente Zellen und bzw. $Z_{l\varrho}^{(1)}, Z_{r\varrho}^{(1)}, Z_{l\varrho}^{(2)}, Z_{r\varrho}^{(2)}, \ldots$ die Flächenstücke ihrer Berandung, so wird eine Überlagerung $\mathfrak{U}$ des Außenraumes $\mathfrak{A}$ erklärt, indem man paarweise die Flächenstücke $Z_{l\varrho}^{(\sigma)}$ und $Z_{r\varrho}^{(\sigma)}$ mit gleichem Index ϱ und gleichem oder verschiedenem Index σ aufeinander klebt, und zwar so, daß sich um jede Gerade über einer Doppelachse gerade vier solcher Flächenstückpaare gruppieren; oder anders gesagt so, daß jeder Weg $\mathfrak{w}^{(\varrho)}$ des Überlagerungsraumes über einem geschlossenen Wege $\mathfrak{w}$ des Knotenaußenraumes, der eine Doppelachse gerade einmal umschlingt, selbst wieder geschlossen ist.

Beim Durchschreiten der Z_ϱ entsprechenden Flächenstücke in einer bestimmten Richtung (von links nach rechts) komme man von irgendeiner Zelle $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots$ in irgendeine gleiche oder verschiedene Zelle $Z^{(a_1)}, Z^{(a_2)}, \ldots$. Die a_ϱ durchlaufen dabei alle Indizes der Zellen $Z^{(\varrho)}$ und die so zueinander zugeordneten Zahlen

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots \\ a_1, & a_2, & \ldots \end{pmatrix} = \pi_\varrho$$

bilden also eine bestimmte Permutation. Jedem Flächenstück Z_ϱ entspricht so gerade eine Permutation π_ϱ, und wegen der besonderen Bedingung für unsere Überlagerung erfüllen diese π_ϱ die Relationen der Fundamentalgruppe des Knotenaußenraumes: Entsprechen nämlich den irgendwie normierten Flächenstücken Z_ϱ die Erzeugenden der Knotengruppe K_ϱ und entspricht dem Umlaufen einer Doppelachse die Relation

$$(1) \qquad K_{\varrho+1} = K_{d_\varrho}^{\varepsilon_\varrho} K_\varrho K_{d_\varrho}^{-\varepsilon_\varrho} \qquad (\varepsilon_\varrho = \pm 1,\ \varrho = 1, \ldots, n-1),$$

so muß auch, weil die $\mathfrak{w}^{(\varrho)}$ geschlossen,

$$\pi_{\varrho+1} = \pi_{d_\varrho}^{\varepsilon_\varrho} \pi_\varrho \pi_{d_\varrho}^{-\varepsilon_\varrho}$$

sein. Die π_ϱ erzeugen also eine zur Knotengruppe isomorphe Gruppe $\mathfrak{P}$, und jede zur Knotengruppe isomorphe Permutationsgruppe $\mathfrak{P}$ liefert einen Überlagerungsraum $\mathfrak{U}$ von der geforderten Eigenschaft

Nun sieht man aber sofort, wie man aus der Kenntnis von solchen Gruppen $\mathfrak{P}$ einen neuen Einblick in die Struktur der Knotengruppe gewinnen kann. Der zu $\mathfrak{P}$ gehörige Überlagerungsraum $\mathfrak{U}$ hat eine bestimmte Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$, und diese ist offenbar eine Untergruppe der Knotengruppe. Die Fundamentalgruppe läßt sich aber sofort aus dem Schema der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{U}$ ablesen, und somit lassen sich aus der Kenntnis von $\mathfrak{P}$ die definierenden Relationen einer gewissen Untergruppe der Knotengruppe ableiten. (§ 2.)

Bisher[1]) betrachtete ich die Räume $\mathfrak{U}$, bei denen die $\mathfrak{P}$ zyklische Gruppen von endlicher oder unendlicher Ordnung sind. Diese $\mathfrak{P}$ sind zu allen Knotengruppen isomorph. Die π_ϱ werden alle gleich und können bei endlicher Ordnung n von $\mathfrak{P}$ gleich dem Zyklus

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

gewählt werden. Aus den Fundamentalgruppen der zugehörigen Überlagerungsräume kann man nun aber leicht neue, weniger triviale Gruppen $\mathfrak{P}$ bestimmen.

---

[1]) Hamb. Abhdlg. **5** (1926), S. 2–23, u. **6** (1928), S. 56–64.

Es gibt z. B. viele Knoten, für welche die Gruppe des zweifachen Überlagerungsraumes der eben beschriebenen Art isomorph zu einer zyklischen Gruppe ist, und daraus folgt dann, daß die zugehörige Knotengruppe selbst zu einer sogenannten Diedergruppe isomorph ist. (§ 1.) Dementsprechend lassen sich bei diesen Knoten (also jetzt nicht mehr bei allen) gewisse neue Überlagerungsräume erklären und gewisse neue Untergruppen aufstellen. So erhält man z. B. für die Kleeblattschlinge einen solchen Überlagerungsraum, wenn man den drei Flächenstücken des Zylinders durch die Kleeblattschlinge die Permutationen

$$\pi_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}, \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}, \qquad \pi_3 = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$$

entsprechen läßt.

Diese spezielle Tatsache ist übrigens längst bekannt, und man bemerkte ferner, daß der so entstehende Raum ein sphärischer Raum ist, wenn das Unendlichferne der Zellen $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, $Z^{(3)}$ als Punkt erklärt wird und man die Überlagerungskurven der Kleeblattschlinge als innere Punkte zum Überlagerungsraum hinzunimmt.

Dies Resultat wollen wir verallgemeinern und ausbauen: *Ist* $\mathfrak{C}$ *ein Knoten, dessen Gruppe durch zwei Elemente* K *und* K^* *erzeugt wird, die beide einem einmaligen Durchschreiten des Zylinders* Z *entsprechen und zwischen denen eine Relation*

$$K^* = LKL^{-1}, \qquad L = L(K, K^*) \tag{2}$$

besteht, so gibt es eine Permutationsgruppe $\mathfrak{P}$ *und einen zugehörigen Überlagerungsraum* $\mathfrak{U}$, *dessen Fundamentalgruppe* $\mathfrak{F}$ *die Identität oder die Gruppe einer Verkettung ist, je nachdem die Überlagerungskurven des Knotens mit zum Überlagerungsraum gerechnet oder als berandend aus ihm herausgenommen werden.* (§ 3.) In vielen Fällen besteht diese Verkettung aus unverknoteten Kurven (§ 4). Entartet die Verkettung nicht in einen einfachen Knoten, so liefern die Verschlingungszahlen der Überlagerungskurven neue eigenartige Knoteninvarianten.

§ 1.

Der Überlagerungsraum.

Sind $K_1, \ldots, K_n$ die n Erzeugenden der Knotengruppe $\mathfrak{K}$, die dem positiven Durchschreiten der Zylinderstücke $Z_1, \ldots, Z_n$ entsprechen und (1) die zugehörigen Relationen, so nehmen wir für unsere speziellen Knoten also an, daß sich infolge (1) alle K_ϱ bis auf zwei, $K_1 = K$ und K^* sukzessive eliminieren lassen und daß dann nur eine Relation der Form (2)

übrigbleibe. An Stelle von K^* führen wir $S = K^* K^{-1}$ als Erzeugende ein und erhalten dann

$$(3) \qquad R(S, K) \equiv LKL^{-1}K^{-1}S^{-1} = 1, \qquad L = L(S, K)$$

als neue definierende Relation. Wir wollen nun zunächst zeigen, daß $\mathfrak{R}$ *zu einer Diedergruppe isomorph ist.*

Um an die Einleitung und frühere Ergebnisse anzuknüpfen, bilden wir dazu die Fundamentalgruppe des Überlagerungsraumes, der zu

$$\pi_\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\varrho = 1, \ldots, n)$$

gehört. Sie ist die invariante Untergruppe $\mathfrak{R}_2$ von $\mathfrak{R}$, deren Faktorgruppe die zyklische Gruppe der Ordnung 2 ist und nach dem bekannten Verfahren Untergruppen zu bestimmen[2]), können wir

$$(4) \qquad S, \quad \bar{S} = KSK^{-1}, \quad \bar{K} = K^2$$

als Erzeugende von $\mathfrak{R}_2$ wählen und finden dann die definierenden Relationen, indem wir R und KRK^{-1} durch $S, \bar{S}, \bar{K}$ vorschriftsmäßig ausdrücken und gleich 1 setzen. L kann als zu $\mathfrak{R}_2$ gehörig vorausgesetzt werden, denn andernfalls könnte es durch LK ersetzt werden, das dann gewiß zu $\mathfrak{R}_2$ gehört. Setzen wir zur Abkürzung $KLK^{-1} = \bar{L}$, so ist

$$(5) \qquad S = L\bar{L}^{-1}, \quad \bar{S} = \bar{L}\bar{K}L^{-1}\bar{K}^{-1}.$$

Nehmen wir nun die Kurve über $\mathfrak{C}$ zum Überlagerungsraum hinzu, so haben wir noch die Relation $\bar{K} = K^2 = 1$ hinzuzufügen und es folgt alsdann aus (5) $\bar{S} = S^{-1}$. Wird dann $L = S^{-k}$, so ist $\bar{L} = S^k$ und daher $S^{2k+1} = 1$, und die von S und $\bar{S}$ erzeugte Gruppe ist also eine zyklische Gruppe von endlicher Ordnung, woraus sich unsere Behauptung über $\mathfrak{R}$ leicht folgern läßt.

Dasselbe kann man natürlich auch einsehen, ohne die Gruppe $\mathfrak{R}_2$ zu bilden: Ist $K^2 = 1$, so folgt aus (3)

$$(6) \qquad SKSK = LKL^{-1}K^{-1} \cdot K \cdot LKL^{-1}K^{-1} \cdot K = LK^2L^{-1} = 1.$$

Wir können danach alle Elemente entweder in die Form S^λ oder KS^λ bringen. Und wenn wir nach denselben Überlegungen wie eben $L = S^{-k}$ ansetzen, so folgt wieder $S^{2k+1} = 1$. Setzen wir, um triviale Fallunterscheidungen zu vermeiden, von jetzt an $2k+1$ als positiv voraus, so erhalten wir in

$$S^\lambda, \quad KS^\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, 2k)$$

[2]) Hamb. Abhdlg. **5** (1926), S. 7—23; O. Schreier, ebenda **5** (1927), S. 172—179.

alle Elemente der Gruppe. Sie hat wegen (6) ersichtlich die Struktur einer Diedergruppe; als Ausartung ($k = 0$) kann auch die zyklische Gruppe der Ordnung 2 vorkommen.

In letzterem Fall hat der zugehörige zweifache unberandete *Überlagerungsraum* die Identität als Fundamentalgruppe. Denn diese wird ja durch S und $\bar{S}$ aus (4) erzeugt und durch die Relationen $S = \bar{S}^{-1}$ und $S^{2k+1} = S = 1$ bestimmt.

Ist $2k - 1 \neq 1$, so mögen S und $K = K_1$ beziehungsweise die Permutationen

$$\pi_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 2k+1 \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

(7)

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 2 & & 2k+1 \\ 2k+1 & & \cdots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2k \\ 2k & 3 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} k+1 & k+2 \\ k+2 & k+1 \end{pmatrix}$$

entsprechen. π_S und π_1 erzeugen tatsächlich die Abbildungen eines Dieders mit $2k+1$ Ecken auf sich. Man denke sich nun die $K_2, \ldots, K_n$ entsprechenden Permutationen $\pi_2, \ldots, \pi_n$ berechnet und nach der in der Einleitung skizzierten Vorschrift die entsprechende Überlagerung $\mathfrak{U}$ hergestellt. Wir behaupten: In $\mathfrak{U}$ liegen $k+1$ Kurven über $\mathfrak{C}$. Ist nämlich $\mathfrak{k}$ ein Kreis um $\mathfrak{C}$, der das K_1 entsprechende Flächenstück Z_1 des Zylinders im Außenraum $\mathfrak{A}$ einmal durchsetzt und P ein Punkt auf $\mathfrak{k}$, so gibt es in $\mathfrak{U}$ $2k+1$ Punkte $P^{(1)}, \ldots, P^{(2k+1)}$ über P und $k+1$ verschiedene geschlossene Kurven über $\mathfrak{k}$: Gehe ich nämlich von $P^{(1)}$ aus über $\mathfrak{k}$ längs des Weges $\mathfrak{k}^{(1)}$, so kehre ich nach einmaliger Überlagerung von $\mathfrak{k}$ nach $P^{(1)}$ zurück. Gehe ich von einem anderen Punkte $P^{(\varrho)}$ aus, so kehre ich erst nach zweimaliger Überlagerung von $\mathfrak{k}$ zum Ausgangspunkt zurück. Dabei sind aber die Kurven, die man von $P^{(2)}$ und $P^{(2k+1)}$, $P^{(3)}$ und $P^{(2k)}$ usw. ausgehend beschreibt, dieselben. Wir wollen sie $\mathfrak{k}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{k}^{(k+1)}$ nennen.

Nun entstehen $\pi_2, \ldots, \pi_n$ aus π_1 durch Transformation mit π_S; sie sind also analog gebaut, und man kann daher über jedem Kreis $\mathfrak{k}$, der irgendein Zylinderstück Z_ϱ durchsetzt, gerade solche $k+1$ Überlagerungskurven konstruieren. Jede der Transpositionen eines π_ϱ geht bei dieser Transformation aber aus einer ganz bestimmten Transposition von π_1 hervor, und *wenn man daher* $\mathfrak{k}$ *längs des ganzen Knotens so entlang schiebt, daß er einen (verknoteten) Torus mit* $\mathfrak{C}$ *als Seele beschreibend in seine Ausgangslage zurückkehrt, so beschreiben auch die* $k+1$ *mitwandernden Überlagerungskurven* $k+1$ *getrennte Tori, die sich schließen, wenn* $\mathfrak{k}$ *seine Anfangslage wieder erreicht.* Die Kurve über $\mathfrak{C}$, die der Kreis $\mathfrak{k}^{(\varrho)}$ einmal umschließt, wollen wir $\mathfrak{C}^{(\varrho)}$ nennen.

§ 2.

Die Fundamentalgruppe des Überlagerungsraumes.

Die Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ können wir unmittelbar aus dem Schema der Mannigfaltigkeit mit Hilfe des Verfahrens, Untergruppen zu bestimmen, ablesen. Als Grundpunkte der $2k+1$ Zellen $Z^{(\varrho)}$ nehmen wir $2k+1$ übereinander liegende Punkte $P^{(\varrho)}$. Liegt nun P im Knotenaußenraum $\mathfrak{A}$ über den $P^{(\varrho)}$, und sind $\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_n$ n geschlossene Kreise, die die erzeugenden $K_1, \ldots, K_n$ repräsentieren, so nehmen wir die sämtlichen Kurvenstücke, die die $\mathfrak{k}_\varrho$ je einmal überlagern und in einem $P^{(\varrho)}$ beginnen und endigen, als fundamentale Wegstücke. Alsdann gehen von jedem Punkte $P^{(\varrho)}$ $2n$ verschiedene gerichtete Kurven aus, die eindeutig den gerichteten Kreisen $\mathfrak{k}_\varrho$ und somit auch den Elementen K_ϱ, K_ϱ^{-1} zugeordnet sind. Wir können nun jedem Produkte aus den K_ϱ einen bestimmten Weg zuordnen, der in $P^{(1)}$ beginnt und in irgendeinem $P^{(\varrho)}$ endigt. *Die Fundamentalgruppe besteht aus denjenigen Produkten der K_ϱ, denen Kurven entsprechen, die in $P^{(1)}$ beginnen und endigen.* Sie ist also tatsächlich eine Untergruppe der Knotengruppe. — Ob ein Element M von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{F}$ gehört, können wir leicht feststellen, indem wir die M entsprechende Permutation berechnen und untersuchen, ob diese das Element 1 in sich überführt.

Es ist nun weiterhin leicht, die *Erzeugenden* und *definierenden Relationen* von $\mathfrak{F}$ anzugeben, nachdem wir etwa die den Produkten S^ϱ $(\varrho = 0, \ldots, 2k)$ entsprechenden, in $P^{(1)}$ beginnenden Wege als Hilfswege erklärt haben. Die Erzeugenden sind bei geeignet bestimmtem $m_{\varrho\sigma}$ $(0 \leqq m_{\varrho\sigma} \leqq 2k)$

$$K_{\varrho\sigma} = S^\varrho K_\sigma S^{-m_{\varrho\sigma}} \quad (\varrho = 0, \ldots, 2k;\ \sigma = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Die definierenden Relationen zerfallen in zwei Klassen. Diejenigen der ersten Klasse entsprechen den auf einen Punkt zusammenziehbaren Kurven, welche die Kanten unseres Zellenschemas einmal umlaufen: sind $\mathfrak{w}_\varrho$ $(\varrho = 1, \ldots, n)$ die Wege, die im Außenraum des Knotens je eine Doppelachse einmal umlaufen, so entsprechen den Relationen der ersten Klasse alle Wege des Überlagerungsraumes über den $\mathfrak{w}_\varrho$. Die Relationen der zweiten Klasse erhält man, indem man in (8) S durch die K_ϱ ausgedrückt denkt, die K_ϱ als erzeugender einer freien Gruppe auffaßt und alle die Produkte zwischen den $K_{\varrho\sigma}$ gleich 1 setzt, die in Produkte aus den K_ϱ übersetzt in der freien Gruppe der K_ϱ gleich 1 werden[3]).

Nun kann man aber alle K_ϱ durch K und S ausdrücken. Man kann also alle Kurven des Überlagerungsraumes infolge der Relationen der

[3]) Vgl. H. Tietze, Mon. f. Math. u. Phys., XIX. Jahrg., S. 65—77.

ersten Klasse so deformieren, daß sie nur noch über die Hilfswege und über Kurvenstücke, die $K^{\pm 1}$ und $S^{\pm 1}$ entsprechen, laufen. Führt man die Elemente, die diesen Wegen über $S^{\pm 1}$ entsprechen, als weitere Erzeugende ein und läßt man dann die überflüssigen Erzeugenden $K_{\varrho\sigma}$ $(\sigma \neq 1)$ fort, so werden dabei die Relationen der ersten Klasse abgebaut bis auf diejenigen $2k+1$, die den der Relation (3) zugeordneten Wegen entsprechen.

Die Wege über S entsprechen bei geeignet gewähltem m_ϱ und m_ϱ^* den Produkten

$$S_\varrho = S^\varrho K^* S^{-m_\varrho} \cdot S^{m_\varrho} K^{-1} S^{-m_\varrho^*} = S^{\varrho+1} \cdot S^{-m_\varrho^*} \qquad (0 \leqq m_\varrho, m_\varrho^* \leqq 2k),$$

und hierin muß $m_\varrho^* = \varrho + 1$ sein, falls $\varrho < 2k$, es muß gleich 0 sein, falls $\varrho = 2k$ ist.

Die Relationen der zweiten Klasse besagen also gewiß, daß die Erzeugenden S_ϱ bis auf $S_{2k} = S^{2k+1}$ gleich 1 sind. Im übrigen gehen die Relationen der zweiten Klasse in solche zwischen den $K_{\varrho 1}$ und S_{2k} über, welche in Produkte aus K und S übersetzt, entweder identisch oder auch infolge der Relation (3) gleich 1 werden. Sie zu bestimmen, lehren die Methoden zur Aufstellung der Fundamentalgruppe ebensowenig, wie sie die Relationen der zweiten Klasse überhaupt explizit aufzustellen anweisen.

Hier setzt aber das Verfahren zur Bestimmung von Untergruppen ein[2]), und man bestätigt durch unmittelbare Anwendung desselben auf unsere Untergruppe, deren Nebengruppen durch S^ϱ $(\varrho = 0, 1, \ldots, 2k)$ repräsentiert werden mögen, daß

$$(9) \qquad K_{\varrho 1} \equiv [S^\varrho K S^{-m_{\varrho 1}}], \qquad S_{2k} \equiv [S^{2k+1}] \qquad (\varrho = 0, \ldots, 2k)$$

die Erzeugenden und

$$(10) \qquad S^\varrho R S^{-\varrho} \equiv R_\varrho(K_{\varrho 1}, \overline{S}_0) = 1 \qquad (\varrho = 0, \ldots, 2k)$$

die einzigen definierenden Relationen von $\mathfrak{F}$ sind.

Man bestätigt leicht, daß $m_{\varrho 1} = 2k + 1 - \varrho$ ist. Durch die eckigen Klammern in (9) wollen wir hier und weiterhin andeuten, daß wir die eingeklammerten Elemente als Erzeugende von $\mathfrak{F}$ betrachten.

§ 3.

$\mathfrak{F}$ als Verkettungsgruppe.

Um nun zu zeigen, daß $\mathfrak{F}$ die Gruppe einer Verkettung von $k+1$ Kurven ist, führen wir an Stelle von (9) neue Erzeugende ein, und zwar solche, die Kurven entsprechen, welche nur je eine der Überlagerungskurven des Knotens je einmal umschlingen.

Die Erzeugende K hat bereits diese Eigenschaft. Statt der übrigen, behaupten wir, können wir gewisse endlich viele Elemente

$$[Q_\varrho K^2 Q_\varrho^{-1}] \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{11}$$

als Erzeugende einführen. Alle Elemente der Form (11) gehören jedenfalls zu $\mathfrak{F}$, da die zugehörigen Permutationen wegen $\pi_1^2 = 1$ alle gleich der Identität sind.

Weiterhin aber folgt in $\mathfrak{R}$ nach § 1 aus $K^2 = 1$ ja $SKSK = 1$, $S^{2k+1} = 1$ und also auch $S^{\varrho+1} K S^{\varrho+1} S^{-\varrho} K S^{-\varrho} = 1$ $(\varrho = 1, \ldots, k-1)$. Diese Ausdrücke lassen sich also als Produkte von Transformierten von K^2 und von Transformierten der Relation (3) schreiben. Die letzteren sind in der Knotengruppe gleich 1, und wenn wir sie fortlassen, so erhalten wir $S^{\varrho+1} K S^{\varrho+1} S^{-\varrho} K S^{-\varrho}$ und S^{2k+1} durch endlich viele $Q_\sigma K^2 Q_\sigma^{-1}$ ausgedrückt.

Diese Gleichungen gelten natürlich auch wie alle Relationen von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{F}$, und führen wir einerseits diese $[Q_\varrho K^2 Q_\varrho^{-1}]$ und andrerseits $[S^{-\sigma} K^2 S^\sigma]$ $(\sigma = 1, \ldots, k)$ als weitere Erzeugende ein, so lassen sich nacheinander aus $SKSK$, K und $S^{-1} K^2 S$ zunächst SKS und dann $S^{-1} K S^{-1}$, aus $S^2 K S^2 S^{-1} K S^{-1}$ und $S^{-2} K^2 S^2$ sodann $S^2 K S^2$ und dann $S^{-2} K S^{-2}$ bestimmen usf., und so offenbar aus den neuen eben angegebenen Erzeugenden $[Q_\varrho K^2 Q_\varrho^{-1}]$, $[S^{-\sigma} K^2 S^\sigma]$, K und $[S^{2k+1}]$ alle Erzeugenden (9) darstellen; schließlich kann noch $[S^{2k+1}]$ eliminiert werden.

Nun lassen sich aber sogleich gewisse Relationen zwischen den neuen Erzeugenden angeben. Gehört Q_1 zu der durch S^{q_1} repräsentierten Nebengruppe von $\mathfrak{F}$, so ist

$$Q_1 K^2 Q_1^{-1} = Q_1 S^{-q_1} \cdot S^{q_1} K^2 S^{-q_1} \cdot S^{q_1} Q_1^{-1} = Q_1^* \cdot S^{q_1} K^2 S^{-q_1} \cdot Q_1^{*-1},$$

wo Q_1^* zu $\mathfrak{F}$ gehört. Ist nun $Q_2 K^2 Q_2^{-1}$ ein Element, für das Q_2 zur gleichen Nebengruppe gehört, so sieht man, daß bei geeignetem Q_2^* aus $\mathfrak{F}$

$$Q_2 K^2 Q_2^{-1} = Q_2^* Q_1^{*-1} \cdot Q_1 K^2 Q_1^{-1} \cdot Q_1^* Q_2^{*-1}$$

ist.

Aber es läßt sich auch ferner einsehen, daß in $\mathfrak{F}$

$$Q_1 K^2 Q_1^{-1} = M \cdot Q_2 K^2 Q_2^{-1} \cdot M^{-1}$$

gilt, wo M zu $\mathfrak{F}$ gehört, wenn Q_1 zur Nebengruppe S^q und Q_2 zur Nebengruppe S^{-q} gehört, denn es ist

$$S^q K^2 S^{-q} = S^q K S^q \cdot S^{-q} K^2 S^q S^{-q} \cdot K^{-1} S^{-q}.$$

Nehmen wir nun also die $k+1$ Kurven über dem Knoten $\mathfrak{C}$ zum Überlagerungsraum hinzu, so müssen wir gewiß $K = 1$ und $S^\varrho K^2 S^{-\varrho} = 1$ $(\varrho = 1, \ldots, k)$ setzen, und aus den eben gemachten Feststellungen *folgt* dann tatsächlich, *daß die resultierende Gruppe die Identität wird.*

Folglich lassen sich alle geschlossenen Kurven von $\mathfrak{U}$ so deformieren, daß sie ganz innerhalb einer bestimmten Zelle verlaufen. Es lassen sich insbesondere die Kurven $\mathfrak{C}^{(\varrho)}$ über $\mathfrak{C}$ und alle Kurven, die den Erzeugenden von $\mathfrak{F}$ entsprechen, so deformieren, folglich ist *die Gruppe* $\mathfrak{F}$ tatsächlich *die einer Verkettung.* Löscht man alle Kurven $\mathfrak{C}^{(\varrho)}$ bis auf $\mathfrak{C}^{(1)}$, so werden in $\mathfrak{F}$ alle Erzeugenden bis auf K gleich 1. Nach einem bekannten Resultat von Dehn[4]) ist $\mathfrak{C}^{(1)}$ also unverknotet.

§ 4.

Alternierende Geflechte.

Man kann die $Q_\varrho K^2 Q_\varrho^{-1}$, durch die sich die $S^{\varrho+1} K S^{\varrho+1} S^{-\varrho} K S^{-\varrho}$ $(\varrho = 0, \ldots, k-1)$ ausdrücken lassen, sehr leicht angeben. Nach (6) ist nämlich

$$S^{\varrho+1} K S^{\varrho+1} S^{-\varrho} K S^{-\varrho} = S^{\varrho} L K^2 L^{-1} S^{-\varrho} \quad (\varrho = 0, \ldots, k-1).$$

Dagegen hängt es von der besonderen Beschaffenheit von L ab, wie sich S^{2k+1} durch $Q_\varrho K^2 Q_\varrho^{-1}$ und $S^{-\varrho} K^2 S^{\varrho}$ ausdrücken läßt, und auch wenn dies geglückt ist, so sind die Relationen der Gruppe $\mathfrak{F}$ in den neuen Erzeugenden noch nicht überblickbar. Wir wollen deshalb jetzt eine Klasse von Knoten herausgreifen, bei denen sich diese beiden Fragen beantworten lassen, nämlich solche, die sich in „alternierende 2-Geflechte" (siehe Fig. 1) deformieren lassen. Wir werden dabei auch ein geometrisch interessantes Resultat erhalten: *Bei den alternierenden, zusammenhängenden 2-Geflechten sind die* $k+1$ *Kurven* $\mathfrak{C}^{(\varrho)}$ *über* $\mathfrak{C}$ *sämtlich unverknotet.*

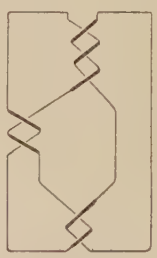


Fig. 1.

1. Wir erklären zunächst die 2-Geflechte. Es sei ein offener Zopf[5]) aus 4 Fäden $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ gegeben. Es mögen nun die beiden linken oberen Enden, die von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die beiden rechten oberen Enden, die von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$, ferner die beiden linken und die beiden rechten unteren Enden des Zopfes miteinander identifiziert werden. Ein solches Gebilde nennen wir ein 2-Geflecht. Entsteht dabei eine einzige Kurve, auf der entlang laufend man Über- und Unterkreuzungsstellen stets abwechselnd passiert, so nennen wir das Geflecht ein alternierendes, zusammenhängendes 2-Geflecht.

Die Überkreuzungen eines Zopfes aus 4 Fäden finden entweder zwischen den beiden linken (Überkreuzungen erster Art) oder den beiden rechten (Überkreuzungen dritter Art) oder den beiden mittleren Fäden (Über-

[4]) Math. Annalen **69** (1910), S. 137–168.

[5]) E. Artin, Hamb. Abhandl. **4** (1925), S. 47–72.

kreuzungen zweiter Art) statt. Beginnt oder endigt der Zopf mit Überkreuzungen erster oder dritter Art, so können wir sie nach Bildung des Geflechtes herausdrillen. Wir wollen deshalb annehmen, daß die ersten und letzten Überkreuzungen zweiter Art sind. Ist bei der ersten Überkreuzung eines alternierenden Geflechtes festgelegt, ob der Faden $\mathfrak{b}$ über den Faden $\mathfrak{c}$ hinübergeht oder nicht, so sind alle folgenden Überkreuzungen schon dadurch festgelegt, daß man angibt, von welcher Art sie sind. Ein alternierendes Geflecht ist also bestimmt, wenn man die erste Überkreuzung festlegt und weiter angibt: Es besitzt der Reihe nach 0) m Überkreuzungen zweiter Art, 1) k_1 Überkreuzungen erster und l_1 Überkreuzungen dritter Art. 2) m_2 Überkreuzungen zweiter Art, ... ϱ) k_ϱ Überkreuzungen erster und l_ϱ Überkreuzungen dritter Art. $\varrho+1$) $m_{\varrho+1}$ Überkreuzungen zweiter Art, ... n) m_n Überkreuzungen zweiter Art. Dabei ist $k_\varrho + l_\varrho \neq 0$, $m_\varrho \neq 0$.

Die Zahlen $m, k_\varrho, l_\varrho, m_\sigma$ sind insofern nicht ganz willkürlich, als unter Umständen bei der Geflechtbildung eine Verkettung von zwei Kurven entstehen kann. Wir erhalten aber z. B. einen Knoten, wenn wir für m eine ungerade Zahl $2\bar{m}+1$ und für die übrigen Zahlen $k_\varrho, l_\varrho, m_\sigma$ gerade Zahlen, $2\bar{k}_\varrho, 2\bar{l}_\varrho, 2\bar{m}_\sigma$ wählen. Nur für diesen Fall wollen wir die Beweise durchführen und auch noch $\bar{m} \geqq 1$ voraussetzen. Die Querstriche lassen wir im folgenden wieder fort.

2. Um die Gruppe dieses Geflechtes aufzustellen, führen wir die folgenden Bezeichnungen für gewisse Gruppenelemente ein: Ein Element, das einer einmaligen Umkreisung der Fäden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ von links nach rechts entspricht, bezeichnen wir bzw. mit den Buchstaben A, B, C, D. Den Umläufen direkt bei den ursprünglichen Anfangspunkten der Fäden ordnen wir A_0, B_0, C_0, D_0, denjenigen nach den ersten $2m+1$ Überkreuzungen A_1, B_1, C_1, D_1, denjenigen nach den nächsten $2k_1$ und $2l_1$ Überkreuzungen A_2, B_2, C_2, D_2, denjenigen nach den nächsten $2m_3$ Überkreuzungen A_3, B_3, C_3, D_3, usf. zu. Offenbar ist

$$A_0 B_0 = 1, \quad C_0 D_0 = 1, \tag{11}$$

$$A_\varrho C_\varrho B_\varrho D_\varrho = 1 \qquad (\varrho = 1, \ldots, n+1), \tag{12}$$

$$A_{n+1} C_{n+1} = 1, \quad B_{n+1} D_{n+1} = 1. \tag{13}$$

Wir setzen $B_0 = K^*$, $C_0 = K$ und führen die weiteren Elemente

$$\begin{gathered} S = B_0 C_0, \quad T_\varrho = A_\varrho C_\varrho \ (\varrho = 1, 3, 5, \ldots, n-1), \\ S_\varrho = C_\varrho B_\varrho \ (\varrho = 2, 4, \ldots, n) \end{gathered} \tag{14}$$

ein. Zwischen diesen Elementen bestehen dann, wenn bei der ersten Überkreuzung $\mathfrak{c}$ über $\mathfrak{b}$ herübergeht, die folgenden Relationen:

$$A_1 = A_0, \quad C_1 = S^{-m} C_0 S^m, \quad B_1 = S^{-m-1} B_0 S^{m+1}, \quad D_1 = D_0,$$
$$A_{\varrho+1} = T_\varrho^{k_\varrho} A_\varrho T_\varrho^{-k_\varrho}, \quad C_{\varrho+1} = T_\varrho^{k_\varrho} C_\varrho T_\varrho^{-k_\varrho},$$
(15) $$B_{\varrho+1} = T_\varrho^{-l_\varrho} B_\varrho T_\varrho^{l_\varrho}, \quad D_{\varrho+1} = T_\varrho^{-l_\varrho} D_\varrho T_\varrho^{l_\varrho} \quad (\varrho = 1, 3, \ldots, n-1),$$
$$A_{\varrho+1} = A_\varrho, \quad C_{\varrho+1} = S_\varrho^{-m_\varrho} C_\varrho S_\varrho^{m_\varrho},$$
$$B_{\varrho+1} = S_\varrho^{-m_\varrho} B_\varrho S_\varrho^{m_\varrho}, \quad D_{\varrho+1} = D_\varrho \qquad (\varrho = 2, 4, \ldots, n).$$

Man liest aus (14), (15) ab, daß man durch $K = C_0$ und $S = B_0 C_0$ sukzessive $A_1, B_1, C_1, D_1, T_1, A_2, B_2, C_2, D_2, S_2, A_3, B_3, C_3, D_3, \ldots$ und schließlich $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}$ ausdrücken kann. Wir betrachten daher von jetzt an die Elementzeichen $A_\varrho, B_\varrho, C_\varrho, D_\varrho, T_\varrho, S_\varrho$ nur noch als Abkürzungen für Produkte in K und S; man erhält dann zwischen K und S die Relationen, die aus (12) und (13) durch Einsetzen entstehen.

Die ersteren sind alle in der freien durch K und S erzeugten Gruppe identisch gleich 1. Es ist nämlich

$$A_1 C_1 B_1 D_1 = K S^{-1} S^{-m} K S^m S^{-m-1} S K^{-1} S^{m+1} K^{-1} = 1.$$

Sei nun $A_\varrho C_\varrho B_\varrho D_\varrho = 1$ identisch in K und S, und ϱ gerade. Dann ist nach (15)

$$A_{\varrho+1} C_{\varrho+1} B_{\varrho+1} D_{\varrho+1} = A_\varrho S_\varrho^{-m_\varrho} C_\varrho B_\varrho S^{m_\varrho} D_\varrho$$

und dieses nach (14) weiter gleich $A_\varrho C_\varrho B_\varrho D_\varrho$. Ist ϱ ungerade, so ist nach (15)

$$A_{\varrho+1} C_{\varrho+1} B_{\varrho+1} D_{\varrho+1} = T_\varrho^{k_\varrho} A_\varrho C_\varrho T_\varrho^{-k_\varrho} T_\varrho^{-l_\varrho} B_\varrho D_\varrho T_\varrho^{l_\varrho}.$$

Dies ist nach Erklärung von T_ϱ gleich $A_\varrho C_\varrho T_\varrho^{-l_\varrho} B_\varrho D_\varrho T^{l_\varrho}$, und da identisch in S und K nach Voraussetzung $T_\varrho = A_\varrho C_\varrho = D_\varrho^{-1} B_\varrho^{-1}$ ist, so gilt auch

$$A_\varrho C_\varrho T_\varrho^{-l_\varrho} B_\varrho D_\varrho T^{l_\varrho} = A_\varrho C_\varrho B_\varrho D_\varrho.$$

Hieraus folgt dann, daß die beiden noch übrigen Relationen, die aus (13) hervorgehen, miteinander identisch sind. Setzen wir

$$A_{n+1} = M_1 K^{*-1} M_1^{-1}, \quad B_{n+1} = M_3 K^* M_3^{-1},$$
$$C_{n+1} = M_2 K M_2^{-1}, \quad D_{n+1} = M_4 K^{-1} M_4^{-1},$$

so ist nach (13) bei geeignet erklärtem L_1, L_2

(16) $$R_1 \equiv M_1^{-1} M_2 K M_2^{-1} M_1 K^{*-1} = L_1 K L_1^{-1} K^{*-1} = L_1 K L_1^{-1} K S^{-1} = 1,$$
$$R_2 \equiv M_3^{-1} M_4 K M_4^{-1} M_3 K^{*-1} = L_2 K L_1^{-1} K^{*-1} = L_2 K L_2^{-1} K S^{-1} = 1,$$

und es gilt dann nach (12) identisch in S und K

(17) $$M_1 K^* R_1 K^{*-1} M_1^{-1} \cdot M_3 R_2^{-1} M_3^{-1} \equiv 1.$$

3. Die besondere Eigenschaft von L_1, auf der der weitere Beweis im wesentlichen beruht, ist nun die folgende: L_1 enthält nur erste Potenzen von K, und greift man irgend drei benachbarte Potenzen $S^a K^{\mp 1} S^b$ aus L_1 heraus, so haben a und b entgegengesetztes Vorzeichen; wir nennen L_1 deshalb „in S alternierend“ oder kurz „alternierend“.

Zunächst einige Eigenschaften alternierender Potenzprodukte. Sind F und G alternierende Produkte, so ist FG ebenfalls alternierend, wenn F und G „alternierend zusammenstoßen“, d. h. wenn entweder F mit $S^{\pm a}$ endigt und G mit $S^{\pm b}$ beginnt, oder wenn F mit $S^{\pm a}$ endigt und G mit $KS^{\mp b}$ beginnt, oder wenn F mit $S^{\pm a}K$ endigt und G mit $S^{\mp b}$ beginnt $(a, b > 0)$, oder wenn einer dieser drei Fälle eintritt, nachdem $F \cdot G$ durch Anwendung trivialer Relationen in der freien von S und K erzeugten Gruppe in $F_1 G_1$ verwandelt, nach einem der drei angegebenen Fälle zusammenstoßen.

Sind F und F^2 alternierend, so ist auch F^m alternierend $(m > 2)$; ist F alternierend, so auch F^{-1}; ist F alternierend, so auch FKF^{-1}; ist FKF^{-1} und GF alternierend, so auch $GFKF^{-1}G^{-1}$.

Wir behaupten nun: Sind T_ϱ, T_ϱ^2, $T_\varrho A_\varrho T_\varrho^{-1}$, $T_\varrho^{-1} B_\varrho T_\varrho$, $T_\varrho C_\varrho T_\varrho^{-1}$, $T_\varrho^{-1} D_\varrho T_\varrho$ alternierend, so ist auch $S_{\varrho+1}$, $S_{\varrho+1}^2$, $S_{\varrho+1}^{-1} B_{\varrho+1} S_{\varrho+1}$, $S_{\varrho+1}^{-1} C_{\varrho+1} S_{\varrho+1}$, $T_{\varrho+2}$, $T_{\varrho+2}^2$, $T_{\varrho+2} A_{\varrho+2} T_{\varrho+2}^{-1}$, $T_{\varrho+2}^{-1} B_{\varrho+2} T_{\varrho+2}$, $T_{\varrho+2} C_{\varrho+2} T_{\varrho+2}^{-1}$, $T_{\varrho+2}^{-1} D_{\varrho+2} T_{\varrho+2}$ alternierend.

Zum Beweise überzeugen wir uns in allen Fällen, daß die Produkte alternierender Elemente, die wir zu bilden haben, wieder alternierend sind.

1) $A_{\varrho+1} = T_\varrho^{k_\varrho} A_\varrho T_\varrho^{-k_\varrho}$, $B_{\varrho+1}$, $C_{\varrho+1}$, $D_{\varrho+1}$ sind alternierend.

2) $S_{\varrho+1} = C_{\varrho+1} B_{\varrho+1} = T_\varrho^{k_\varrho} C_\varrho T^{-k_\varrho} \cdot T_\varrho^{-l_\varrho} B_\varrho T_\varrho^{l_\varrho}$ ist alternierend, entweder weil T_ϱ und T_ϱ^2, oder weil C_ϱ und T_ϱ^{-1}, oder weil T_ϱ^{-1} und B_ϱ alternierend aneinanderstoßen.

3) $S_{\varrho+1}^2 = T_\varrho^{k_\varrho} C_\varrho \ldots B_\varrho T_\varrho^{k_\varrho} \cdot T_\varrho^{k_\varrho} C_\varrho \ldots$ ist alternierend, entweder weil T_ϱ^2 alternierend oder weil B_ϱ, T_ϱ oder weil T_ϱ, C_ϱ alternierend zusammenstoßen.

4) $S_{\varrho+1}^{-1} B_{\varrho+1} S_{\varrho+1} = T_\varrho^{-l_\varrho} B_\varrho^{-1} \ldots C_\varrho^{-1} T_\varrho^{-k_\varrho} \cdot T_\varrho^{-l_\varrho} B_\varrho T_\varrho^{l_\varrho} \ldots$ ist aus dem gleichen Grunde alternierend.

5) $S_{\varrho+1}^{-1} C_{\varrho+1} S_{\varrho+1} = B_{\varrho+1}^{-1} C_{\varrho+1} B_{\varrho+1} = T_\varrho^{-l_\varrho} B_\varrho^{-1} T_\varrho^{l_\varrho} \cdot T_\varrho^{k_\varrho} C_\varrho T_\varrho^{-k_\varrho} \ldots$ ist wieder alternierend.

6)
$$\begin{aligned} T_{\varrho+2} = A_{\varrho+2} C_{\varrho+2} = A_{\varrho+1} C_{\varrho+2} &= T_\varrho^{k_\varrho} A_\varrho T_\varrho^{-k_\varrho} S_{\varrho+1}^{-m_{\varrho+1}} C_{\varrho+1} S_{\varrho+1}^{m_{\varrho+1}} \\ &= T_\varrho^{k_\varrho} A_\varrho T_\varrho^{-k_\varrho} B_{\varrho+1}^{-1} C_{\varrho+1}^{-1} S_{\varrho+1}^{-m_{\varrho+1}+1} \ldots S_{\varrho+1}^{m_\varrho} \\ &= T_\varrho^{k_\varrho} A_\varrho T_\varrho^{-k_\varrho} T_\varrho^{-l_\varrho} B_\varrho T_\varrho^{l_\varrho} \ldots S_{\varrho+1}^{m_\varrho} \text{ ist alternierend.} \end{aligned}$$

7) $T_{\varrho+2}^2$ ist alternierend, weil (vgl. 6))

$$T_{\varrho+2}^2 = T_\varrho^{k_\varrho} A_\varrho \dots S_{\varrho+1}^{m_\varrho - 1} C_{\varrho+1} B_{\varrho+1} \cdot T_\varrho^{k_\varrho} A_\varrho \dots = \dots B_\varrho T_\varrho^{l_\varrho} \cdot T_\varrho^{k_\varrho} A_\varrho \dots .$$

8) $T_{\varrho+2} A_{\varrho+2} T_{\varrho+2}^{-1} = T_{\varrho+2} T_\varrho A_\varrho T_\varrho^{-1} T_{\varrho+2}^{-1}$ und $T_{\varrho+2}^{-1} D_{\varrho+2} T_{\varrho+2} = T_{\varrho+2}^{-1} T_\varrho^{-1} D_\varrho T_\varrho T_{\varrho+2}$ sind nach der unter 7) angegebenen Formel für $T_{\varrho+2}$ alternierend.

9) $T_{\varrho+2} C_{\varrho+2} T_{\varrho+2}^{-1} = A_{\varrho+2} C_{\varrho+2} A_{\varrho+2}^{-1} = A_{\varrho+1} C_{\varrho+2} A_{\varrho+1}^{-1}$ ist nach 5) gleich $T_\varrho^{k_\varrho} A_\varrho T_\varrho^{-k_\varrho} \cdot T_\varrho^{-l_\varrho} B_\varrho^{-1} \dots$ und daher alternierend.

10) $T_{\varrho+2}^{-1} B_{\varrho+2} T_{\varrho+2} = \dots A_\varrho^{-1} T_\varrho^{-k_\varrho} T_\varrho^{-l_\varrho} B_\varrho^{-1} \dots$ ist ebenfalls alternierend.

Nach 2) (für $\varrho = n-1$) stoßen schließlich $M_1^{-1} = \dots T_{n-1}^{-k_{n-1}}$ und $M_2 = S_n^{-m_n} \dots$ alternierend zusammen, und da die Voraussetzungen über T_ϱ, A_σ usw. für $\varrho = 1$ erfüllt sind, wie man leicht nachprüft, ist folglich L_1 selbst alternierend.

Wir behaupten ferner, daß L_1 mit $S^{-m} K^{-1}$ beginnt, denn es ist

$$L_1 = M_1^{-1} M_2 = T_1^{-k_1} T_3^{-k_3} \dots T_{n-1}^{-k_{n-1}} \cdot T_{n-1}^{-l_{n-1}} \dots ,$$

wo $T_1^{-1} = S^{-m} K^{-1} S^m K S^{-1}$ ist. Nun ist (nach 7))

$$T_{n-1}^{-k_{n-1}-l_{n-1}} = T_{n-1}^{-1} T_{n-1}^{-k_{n-1}-l_{n-1}+1} \quad T_{n-3}^{-l_{n-3}} \dots ,$$

entsprechend $T_{n-3}^{-k_{n-3}-l_{n-3}} = T_{n-5}^{-l_{n-5}} \dots$, usf., und so sieht man, daß L_1 tatsächlich mit T_1^{-1} und also mit $S^{-m} K^{-1}$ beginnt. Und schließlich bemerken wir, daß L_1 eine gerade Anzahl von Faktoren K enthält.

4. Jetzt werden wir uns leicht davon überzeugen, daß die Überlagerungskurven des Knotens in $\mathfrak{U}$ unverknotet sind. Wir führen zunächst an Stelle von (9) die Erzeugenden

$$(18) \qquad [S^\varrho K S^\varrho] \quad (\varrho = 0, \pm 1, \dots, \pm k), \qquad [S^{2k+1}]$$

ein. Schreiben wir ein alternierendes Element Q in der Form

$$Q = \prod_{\varrho=1}^{q} S^{\gamma_\varrho} K^{\varepsilon_\varrho} S^{\gamma_\varrho} \cdot S^\gamma \qquad (\varepsilon_\varrho = \pm 1),$$

so haben die γ_ϱ wechselndes Vorzeichen, und es ist $|\gamma_\varrho| < |\gamma_{\varrho+1}|$. Setzen wir $K^2 = 1$, so wird $Q = K S^\gamma$ oder $= S^\gamma$. Da L_1 eine gerade Anzahl von Faktoren K enthält, mit S^{-m} beginnt und in $\mathfrak{N}$ aus $K^2 = 1$ $S^{2k+1} = 1$ folgt, muß

$$L_1 = \prod_{\varrho=1}^{l} S^{\lambda_\varrho} K^{\varepsilon_\varrho} S^{\lambda_\varrho} \cdot S^{-k} \qquad (k > 0)$$

sein. Hierin ist $\lambda_1 = -m$ und $\varepsilon_1 = -1$.

Es ist also

$$L_1 K L_1^{-1} K S^{-1} \equiv \prod_{\varrho=1}^{l} S^{\lambda_\varrho} K^{\varepsilon_\varrho} S^{\lambda_\varrho} \cdot S^{-k} K S^{-k} \cdot \prod_{\varrho=1}^{l} S^{\bar\lambda_\varrho} K^{\eta_\varrho} K^{\bar\lambda_\varrho} \cdot S^{2k} K S^{-1}$$

$$(\varepsilon_\varrho, \eta_\varrho = \pm 1).$$

Hierin ist

$$|\lambda_\varrho| < |\lambda_{\varrho+1}| < k < |\bar\lambda_\varrho| < |\bar\lambda_{\varrho+1}|.$$

Setze ich $\bar\lambda_\varrho = 2k+1+\mu_\varrho$ $(0 > \mu_\varrho > -2k-1)$, wenn $\bar\lambda_\varrho > 0$, und $\bar\lambda_\varrho = -2k-1+\mu_\varrho$ $(0 < \mu_\varrho < 2k+1)$, wenn $\bar\lambda_\varrho < 0$, und beachte, daß $\bar\lambda_1 > 0$ und daher $\bar\lambda_l < 0$, so ist

$$L_1 K L_1^{-1} K S^{-1}$$

$$\equiv \prod_{\varrho=1}^{l} [S^{\lambda_\varrho} K^{\varepsilon_\varrho} S^{\lambda_\varrho}] \cdot [S^{-k} K S^{-k}] \cdot [S^{2k+1}] \prod_{\varrho=1}^{l} [S^{\mu_\varrho} K^{\eta_\varrho} S^{\mu_\varrho}] \cdot [S^{-1} K S^{-1}],$$

folglich ist $[S^{2k+1}]$ durch die übrigen Erzeugenden, $[S^\varrho K S^\varrho]$, ausdrückbar.

Wir bilden nun die Relationen

$$(19) \qquad [S^{-\varrho-1} K S^{-\varrho-1}]^{-1} [S^\varrho K S^\varrho]^{-1} = S^\varrho L_1 K^2 L_1^{-1} S^{-\varrho},$$

die aus (16) analog wie (6) aus (3) folgen und nehmen

$$(20) \qquad \begin{matrix} [K],\ [S^\varrho L K^2 L^{-1} S^{-\varrho}] & (\varrho = 0, 1, \ldots, k-1), \\ [S^{-\sigma} K^2 S^\sigma] & (\sigma = 1, \ldots, k) \end{matrix}$$

als neue Erzeugende. Nun ist nach der Formel für L_1

$$(21) \qquad \begin{aligned} &[S^\varrho L K^2 L^{-1} S^{-\varrho}] \\ &= [S^{\lambda_1+\varrho} K^{\varepsilon_1} S^{\lambda_1+\varrho}] \cdot [S^{\lambda_2-\varrho} K^{\varepsilon_2} S^{\lambda_2-\varrho}] \ldots [S^{-k+\varrho} K^2 S^{k-\varrho}] \ldots . \end{aligned}$$

Ist $\varrho = 0, 1, \ldots, |\lambda_1|$, so bilden die $|\lambda_\sigma \pm \varrho|$ eine mit σ wachsende Reihe von Größen. Drücke ich daher in diesen Produkten die Erzeugenden (18) durch die Erzeugenden (20) nach den Formeln (19) bzw. (24) aus, so sieht man, daß $\prod_{\sigma=1}^{l} [S^{\lambda_\sigma \pm \varrho} K^{\varepsilon_\sigma} S^{\lambda_\sigma \pm \varrho}]$ von $[S^{-k+\varrho} K^2 S^{k-\varrho}]$ nicht abhängt, weil $S^\alpha K^{\pm 1} S^\alpha$ für $\alpha \leqq n$ sich durch $[S^{\sigma-1} L K L^{-1} S^{-\sigma+1}]$ und $[S^{-\tau} K^2 S^\tau]$ mit $\sigma, \tau \leqq n$ ausdrücken lassen.

Für $\varrho > |\lambda_1|$ bilden die $|\lambda_\sigma \pm \varrho|$ eine zunächst absteigende und dann wieder stets zunehmende Folge von Größen. Solange also $|\lambda_1 + \varrho| < k - \varrho$ ist, gilt dasselbe, was wir eben sagten. Ist $|\lambda_1 + \varrho| = k - \varrho$, so muß $\lambda_1 + \varrho > 0$ sein und $S^{\lambda_1+\varrho} K^{-1} S^{\lambda_1+\varrho}$ läßt sich daher nach (19) bzw. (24) ebenfalls noch gerade ohne $S^{-\lambda_1-\varrho} K^2 S^{\lambda_1+\varrho}$ durch die neuen Erzeugenden ausdrücken. Ist schließlich $|\lambda_1 + \varrho| > k - \varrho$, so ist $\lambda_1 + \varrho$ der größte Index, der rechts vorkommt. Andererseits gilt aber $\varrho + \lambda_1 < \varrho$, weil λ_1 negativ ist. $S^\varrho L K^2 L^{-1} S^{-\varrho}$ kommt daher in der rechten Seite nicht vor, wenn wir die Erzeugenden (20) einführen.

Löscht man in $\mathfrak{U}$ *nun* $\mathfrak{C}^{(1)}$ *und alle weiteren Kurven* $\mathfrak{C}^{(\sigma)}$ *über dem Knoten bis auf eine aus, setzt man m. a. W. alle Erzeugenden gleich* 1 *bis auf die zwei, die zu einer Kurve* $\mathfrak{C}^{(\varrho)}$ $(\varrho \neq 1)$ *der Verkettung gehören,* $S^{-k+\varrho} K^2 S^{k-\varrho}$ *und* $S^{\varrho} L K^2 L^{-1} S^{-\varrho}$, *so sieht man, daß die beschriebenen Relationen* (21) *besagen, daß diese beiden Erzeugenden gleich werden,* daß also die dann resultierende Gruppe der übrigbleibenden Kurve abelsch ist. *Die Kurve* $\mathfrak{C}^{(\varrho)}$ *ist daher* nach Dehn[3]) *unverknotet.*

§ 5.

Das vollständige Relationensystem.

Wir wollen nun noch die Relationen (21), in den neuen Erzeugenden (20) ausgedrückt, zu einem vollständigen Relationensystem ergänzen.

Wir gehen von der ursprünglichen am Ende von § 2 angegebenen Darstellung der Gruppe $\mathfrak{F}$ aus, und führen zunächst explizit als neue Erzeugende

$$\begin{aligned} [S^{\varrho} K S^{\varrho}]\,[S^{2k+1}]^{-1} &= [S^{\varrho} K S^{-2k+1+\varrho}] \qquad (\varrho = 1, \ldots, k), \\ [S^{2k+1}]\,[S^{\varrho} K S^{\varrho}] &= [S^{2k+1+\varrho} K S^{\varrho}] \quad (\varrho = -1, \ldots, -k) \end{aligned} \tag{22}$$

ein. Eliminieren wir mit Hilfe dieser Gleichungen die $S^{\varrho} K S^{-2k-1+\varrho}$ aus den Relationen $S^{\varrho} R_1 S^{-\varrho} = 1$ $(\varrho = 0, 1, \ldots, 2k)$, so können wir die Gleichungen (22) alle wieder fortlassen. Nun seien

$$\begin{aligned} [S^{-\varrho} K^2 S^{\varrho}] &= [S^{-\varrho} K S^{-\varrho}]\,[S^{\varrho} K S^{\varrho}] \qquad (\varrho = 1, \ldots, k), \\ [S^{\varrho} L K^2 L^{-1} S^{-\varrho}] &= [S^{-\varrho-1} K S^{-\varrho-1}]^{-1}\,[S^{\varrho} K S^{\varrho}]^{-1} \\ &\qquad (\varrho = 0, 1, \ldots, k-1). \end{aligned} \tag{23}$$

Alsdann folgt

$$\begin{aligned} [S^{-1} K S^{-1}] &= K^{-1} [L K^2 L^{-1}]^{-1}, \\ [S\ \ K S\ \ ] &= [L K^2 L^{-1}]\, K\, [S^{-1} K^2 S], \\ &\vdots \\ [S^{-\varrho} K S^{-\varrho}] &= [S^{-\varrho+1} K^2 S^{\varrho-1}]^{-1} [S^{-\varrho+2} K^2 S^{\varrho-2}]^{-1} \ldots [S^{-1} K^2 S]^{-1} K^{-1} \\ &\quad \times [L K^2 L^{-1}]^{-1} [S L K^2 L^{-1} S^{-1}]^{-1} \ldots [S^{\varrho-1} L K^2 L^{-1} S^{-\varrho+1}]^{-1}, \\ [S^{\varrho}\ \ K S^{\varrho}\ \ ] &= [S^{\varrho-1} L K^2 L^{-1} S^{-\varrho+1}] \ldots [S L K^2 L^{-1} S^{-1}]\, [L K^2 L^{-1}]\, K^{-1} \\ \vdots \qquad &\quad \times [S^{-1} K^2 S] \ldots [S^{-\varrho+2} K^2 S^{\varrho-2}]\, [S^{-\varrho+1} K^2 S^{\varrho-1}]\, [S^{-\varrho} K^2 S^{\varrho}]. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werte für $[S^{\varrho} K S^{\varrho}]$ in (23) ein, so werden alle diese Gleichungen identisch gleich 1, d. h. faßt man die $[S^{\varrho} K S^{\varrho}]$ als Erzeugende einer freien Gruppe auf, so bestimmen die Erzeugenden (20) dieselbe freie Gruppe, und es bleiben nur die aus $S^{\varrho} R_1 S^{-\varrho}$ $(\varrho = 0, 1, \ldots, 2k)$ hervorgehenden Gleichungen als die einzigen definierenden Relationen von $\mathfrak{R}$ in den Erzeugenden (20) übrig.

Wenn wir die zu Beginn des Paragraphen gestellte Aufgabe lösen wollen, so haben wir die Relationen (21) durch weitere Relationen also so zu ergänzen, daß alle Relationen $S^\varrho R_1 S^{-\varrho} = 1$ daraus folgen. Wir können sofort sehen, wie die Relationen (21) aus den letzteren Relationen folgen. Nach Definition von R_1 ist nämlich

$$R_{11} \equiv L_1 K^2 L_1^{-1} K S^{-1} K S^{-1} \equiv R_1 \cdot S K^{-1} S \cdot S^{-1} R_1 S \cdot S^{-1} K S^{-1},$$

also lassen sich die Relationen (21) so schreiben:

$$(26) \qquad S^\varrho R_{11} S^{-\varrho} \equiv S^\varrho R_1 S^{-\varrho} Q_\varrho S^{-\varrho-1} R_1 S^{\varrho+1} Q_\varrho^{-1},$$

wo Q_ϱ zur Gruppe $\mathfrak{F}$ gehört. Wir behaupten nun: *Bilden wir analog aus* R_2

$$R_{22} \equiv L_2 K^2 L_2^{-1} K S^{-1} K S^{-1} \equiv R_2 S K^{-1} S \cdot S^{-1} R_2 S S^{-1} K S^{-1},$$

so bilden die Relationen

$$(27) \quad R_1 = 1, \quad S^\varrho R_{11} S^{-\varrho} = 1, \quad S^\varrho R_{22} S^{-\varrho} = 1 \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots, k-1)$$

ein vollständiges Relationensystem.

Nach (17) ist nämlich

$$R_2 \equiv M_3^{-1} M_1 K^* R_1 K^{*-1} M_1^{-1} M_3 \equiv Q K S^q R_1 S^{-q} K^{-1} Q^{-1},$$

wo Q zu $\mathfrak{F}$ gehört und eine gerade Anzahl von Faktoren K enthält. Also ist

$$(28) \qquad S^\varrho R_{22} S^{-\varrho} = \bar{Q}_\varrho S^{q-\varrho} R_1 S^{-q+\varrho} \bar{Q}_\varrho^{-1} \cdot \bar{Q}_\varrho S^{q+\varrho+1} R_1 S^{-q-\varrho-1} \bar{Q}_\varrho,$$

won $\bar{Q}_\varrho$ und Q_ϱ zu $\mathfrak{F}$ gehören. Die Gleichungen (26) gestatten also mit Hilfe von $S^\sigma R_1 S^{-\sigma}$ die Relation $S^{-\sigma-1} R_1 S^{\sigma+1}$ abzuleiten und die Gleichungen (28) gestatten mit Hilfe von $S^\sigma R_1 S^{-\sigma}$ die Relation $S^{2q+1-\sigma} R_1 S^{-2q-1+\sigma}$ abzuleiten, falls nicht $\sigma \equiv -\sigma - 1 \pmod{2k+1}$ bzw. $\sigma \equiv 2q+1-\sigma \pmod{2k+1}$. Man kann daher aus (27), von R_1 ausgehend, zunächst $S^{-1} R_1 S$ und $S^{2q+1} R_1 S^{-2q-1}$ und so nacheinander einerseits die Relationen mit den Exponenten

$$(29) \quad 0, -1, 2q+2, -2q-3, \ldots, -\varrho(2q+2)-1, (\varrho+1)(2q+2), \ldots,$$

andererseits die mit den Exponenten

$$(30) \quad 0, 2q+1, -2q-2, 4q+3, \ldots, \varrho(2q+2)-1, -\varrho(2q+2), \ldots$$

bestimmen, wenn in den Reihen nicht zwei benachbarte mod $2k+1$ kongruente Glieder vorkommen. Ist dies aber der Fall, so wiederholen sich von da an die Glieder der Reihe in umgekehrter Reihenfolge bis zum ersten, der 0, alsdann schließen sich die Glieder der anderen Reihe in natürlicher Reihenfolge an usw. Aus dieser Eigenschaft folgt sofort, daß wir alle Relationen $S^\varrho R_1 S^{-\varrho}$, deren Exponent in einer der bei-

den Reihen (29), (30) vorkommt, aus (27) ermitteln können, und dies sind gewiß alle $\varrho \bmod 2k+1$, falls $2q+2$ und $2k+1$ teilerfremd sind, denn alsdann durchlaufen die $\varrho(2q+2)$ ja schon alle Restklassen mod $2k+1$. So wollen wir denn jetzt beweisen, daß $2k+1$ und $2q+2$ wirklich teilerfremd sind.

Zunächst gilt dies, wenn $n=0$, wenn also alle $k_\varrho, l_\varrho, m_\varrho = 0$ sind. Alsdann ist $2k+1 = 2m+1$ und $2q+2 = 2m+2$.

Seien nun

$$A_{n+1} \sim S^a K^{*-1} S^{-a}, \quad C_{n+1} \sim S^c K S^{-c}, \quad B_{n+1} \sim S^b K^* S^{-b},$$
$$D_{n+1} \sim S^d K^{-1} S^{-d}$$

die mittels der Relationen $SKSK=1$, $K^2=1$ umgeformten Ausdrücke für die A_{n+1} usw. irgendeines Geflechtes. Die Relation R_1 desselben ist daher $S^{-a}S^cKS^{-c}S^aK^{*-1} = S^{2c-2a-1} = S^{2k+1}$. Da $M_3^{-1}M_1K^* \sim S^{-b}S^aK^* \sim KS^{b-a-1}$ entspricht, ist $2q+2 = 2b-2a$. Wir setzen also voraus, daß

$$(2c-2a-1,\ 2b-2a) = 1,$$

d. h. daß diese Zahlen teilerfremd sind, und denken uns nun dieses Geflecht durch weitere $2k_{n+1}$, $2l_{n+1}$ Verdrillungen erster und dritter Art und durch $2m_{n+2}$ Verdrillungen zweiter Art verlängert und behaupten, daß die Zahlen $2k^*+1$ und $2q^*+2$ des verlängerten Geflechtes wieder teilerfremd sind.

Nun berechnet man mühelos nacheinander die T_{n+1}, S_{n+2} usw. entsprechenden Ausdrücke und findet dann

$$2k^*+1 = -2m_{n+2}[2(k_{n+1}+l_{n+1})(2a-2c+1)+2c-2b-1] + 2c-2a-1,$$

$$2q^*+2 = -2m_{n+2}[2(k_{n+1}+l_{n+1})(2a-2c+1)+2c-2b-1] - 2(k_{n+1}+l_{n+1})(2a-2c+1)+2b-2a.$$

Um den größten gemeinsamen Teiler dieser beiden Ausdrücke zu ermitteln, bilden wir

$$r_1 = 2q^*+2-(2k^*+1) = -2(k_{n+1}+l_{n+1})(2a-2c+1)+2b-2c+1,$$

$$r_2 = 2k^*+1-2m_{n+2}r_1 = 2c-2a-1,$$

$$r_3 = r_1 - 2(k_{n+1}+l_{n+1})r_2 = 2b-2c+1,$$

und finden in der Tat

$$(2k^*+1,\ 2q^*+2) = (r_2, r_3) = (2c-2a-1,\ 2b-2a) = 1.$$

(Eingegangen am 27. April 1928.)

Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme.

Von

S. Bochner in München.

Wir betrachten irgendeine Differentialgleichung der Form

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y + \lambda y = 0. \tag{1}$$

Die Koeffizienten $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ sind irgendwelche reell- oder komplexwertige Funktionen der Variablen x, von denen wir in erster Linie nur anzunehmen brauchen, daß sie in einem gemeinsamen Intervall J der x-Achse definiert sind; und λ bedeutet einen Parameter, der aller komplexen Werte fähig ist.

Wir setzen nunmehr voraus, daß es eine Folge von Parameterwerten

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \tag{2}$$

und eine Folge von Polynomen

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x), \ldots \tag{3}$$

gibt, von denen das n-te, $P_n(x)$, von *genau* n-tem Grade ist, und die so beschaffen sind, daß das Polynom $P_n(x)$ im Intervall J der Gleichung (1) für den Wert $\lambda = \lambda_n$ genügt:

$$p_0(x)P_n''(x) + p_1(x)P_n'(x) + p_2(x)P_n(x) + \lambda_n P_n(x) = 0. \tag{4}$$

Ein solches System von Polynomen wollen wir ein Sturm-Liouvillesches Polynomsystem nennen. Von solcher Art sind die wichtigsten Polynomsysteme der mathematischen Physik: die Legendreschen (allgemeiner: die hypergeometrischen), die Laguerreschen und die Hermiteschen Polynome (vgl. etwa: Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, Kap II, § 8 und § 10).

Es ist eine sehr leichte Aufgabe, die Gesamtheit *aller* Sturm-Liouvilleschen Polynomsysteme aufzustellen. Da aber diese Aufstellung in der

einschlägigen Literatur nicht vorzukommen scheint, sei es gestattet, sie im folgenden näher auszuführen.

Gegeben seien eine Gleichung (1) und dazugehörige Eigenwerte (2) und Eigenfunktionen (3). Setzt man in (4) $n = 0$, so ergibt sich

$$p_2(x) P_0(x) + \lambda_0 P_0(x) = 0;$$

da nach Voraussetzung $P_0(x)$ eine *von Null verschiedene* Konstante sein soll, erhalten wir daraus

$$p_2(x) = -\lambda_0,$$

also daß die Funktion $p_2(x)$ eine Konstante sein muß. Wir können ohne wesentliche Einschränkung annehmen, daß $p_2(x) = 0$, sonst ersetze man die Gleichung (1) durch

$$p_0(x) y'' + p_1(x) y' + \lambda y = 0 \tag{5}$$

und betrachte (5) für die Eigenwerte $\lambda_n' = \lambda_n + p_2$. Aus

$$p_1(x) P_1'(x) + \lambda_1 P_1(x) = 0$$

folgt weiterhin

$$p_1(x) = -\frac{1}{P_1'(x)} \lambda_1 P_1(x), \tag{6}$$

also daß $p_1(x)$ eine lineare Funktion in x ist,

$$p_1(x) = \delta + \varepsilon x,$$

und aus

$$p_0(x) P_2''(x) = -p_1(x) P_2'(x) - \lambda_2 P_2(x)$$

folgt

$$p_0(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2.$$

Wir brauchen also nur noch die Gleichung

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2) y'' + (\delta + \varepsilon x) y' + \lambda y = 0 \tag{7}$$

daraufhin zu untersuchen, wann sie ein Sturm-Liouvillesches Polynomsystem erzeugt.

Transformiert man die Variable x in eine lineare Verbindung $x = a + b\xi$ mit beliebigen komplexen Koeffizienten a und b, $b \neq 0$, so entsteht aus (7) eine Gleichung derselben Bauart (in der Variablen ξ) und falls die Gleichung (7) das Polynomsystem (3) erzeugt, erzeugt die neue Gleichung das Sturm-Liouvillesche Polynomsystem

$$Q_n(\xi) = P_n(a + b\xi).$$

Zur weiteren Diskussion der Gleichungen (7) genügt es daher, sich auf einige „Normalformen“ zu beschränken, aus denen alle anderen durch

passende lineare Transformationen der Variablen x hervorgehen. Es sind dies:

$$1. \quad (\delta + \varepsilon x) y' + \lambda y = 0,$$

$$2. \quad y'' + (\delta + \varepsilon x) y' + \lambda y = 0,$$

$$3. \quad x y'' + (\delta + \varepsilon x) y' + \lambda y = 0,$$

$$4. \quad x^2 y'' + (\delta + \varepsilon x) y' + \lambda y = 0,$$

$$5. \quad x(1-x) y'' + (\delta + \varepsilon x) y' + \lambda y = 0.$$

Die Normalform 1. entspricht dem Fall $\alpha = \beta = \gamma = 0$, die Normalform 2. dem Fall $\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = 0$, und die Normalform 3. dem Fall $\beta \neq 0$, $\gamma = 0$. Ist $\gamma \neq 0$, so muß man zwei Unterfälle unterscheiden, je nachdem die zwei Wurzeln der Gleichung $\alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0$ gleich oder verschieden sind. Im ersten Unterfall kann man durch eine passende lineare Transformation der Variablen der gemeinsamen Wurzel den Wert 0 erteilen und demnach unsere Gleichung auf die Normalform 4. reduzieren; im zweiten Unterfalle kann man durch eine lineare Transformation von x erreichen, daß die zwei Wurzeln die Werte 0 und 1 erhalten und somit unsere Differentialgleichung in die Normalform 5. übergeht.

Um von der Gleichung (7) bei vorgegebenen Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ zu entscheiden, ob sie ein Sturm-Liouvillesches Polynomsystem erzeugt, kann man in folgender Weise verfahren. Man setze die Funktion $y(x)$ als Potenzreihe an:

$$(8) \quad y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$(9) \quad y'(x) = 1 a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots$$

$$(10) \quad y''(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + \dots$$

und führe die Reihen (8) bis (10) in die Gleichung (7) ein. Das gibt für die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots$ die folgenden Bedingungsrelationen, welche den Charakter einer dreigliedrigen Rekursionsformel haben

$$(11) \quad (\nu+2)(\nu+1)\alpha a_{\nu+2} + [(\nu+1)\nu\beta + (\nu+1)\delta] a_{\nu+1} + [\nu(\nu-1)\gamma + \nu\varepsilon + \lambda] a_\nu = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

In allen Einzelfällen, auf die wir die Diskussion der allgemeinen Gleichung (7) zurückführen werden, verschwindet in (11) entweder der Koeffizient von $a_{\nu+2}$ oder der von $a_{\nu+1}$, so daß die Rekursionsformel jeweils nur zweigliedrig ist. Dadurch wird es jeweils möglich zu entscheiden, ob man zu jedem n, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, durch passende Wahl von λ, $\lambda = \lambda_n$, das Rekursionsschema durch eine Folge von Zahlen $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots$ befriedigen kann, für welche $a_{n+1}^{(n)} = a_{n+2}^{(n)} = a_{n+3}^{(n)} = \dots = 0$ und $a_n^{(n)} \neq 0$. Ist so etwas

möglich, dann bildet die Polynomfolge

$$P_n(x) = \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu^{(n)} x^\mu$$

ein Sturm-Liouvillesches System. Unter Umständen (allerdings, wie wir sehen werden, nur unter sehr speziellen) kann *eine* Gleichung *mehrere* Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme erzeugen. Hierbei sehen wir zwei Polynomsysteme, $P_n(x)$ und $Q_n(x)$, als verschieden an, falls für mindestens einen Wert n_0 von n, $n_0 > 0$, die Polynome $P_{n_0}(x)$ und $Q_{n_0}(x)$ sich nicht nur um einen konstanten Faktor unterscheiden.

Wie man der Relation (6) entnimmt, ist für $\varepsilon = 0$ auch $\delta = 0$, und (7) gibt dann

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2) P_n''(x) = -\lambda_n P_n(x).$$

Da jetzt $P_0(x)$ und $P_1(x)$ zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehören und die Gleichung (7) nur zwei linear unabhängige Lösungen haben kann, sind die Eigenwerte der anderen Polynome, z. B. der von $P_3(x)$, von Null verschieden, und daraus folgt $\gamma \neq 0$. In den Normalformen 1. bis 3. werden wir demzufolge den Fall $\varepsilon = 0$ ausschließen.

Die Normalform 1. kann man durch den Übergang von x zu $\delta + \varepsilon x$ auf die Gestalt

$$x y' + \lambda y = 0$$

reduzieren. In dieser endgültigen Form erzeugt sie, als einziges, für $\lambda_n = -n$ das System aller Potenzen

$$P_n(x) = x^n.$$

Die Normalform 2. kann man vermöge der Transformation $\xi = \delta \sqrt{-\frac{1}{2\varepsilon}} + \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}}\, x$ auf die Gestalt

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dy}{d\xi} + \lambda y = 0,$$

d. h. auf die Gestalt

$$y'' - 2x y' + \lambda y = 0$$

zurückführen. Diese Gleichung erzeugt bekanntlich die Hermiteschen Polynome

$$P_n(x) = \sum_{\varrho=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\varrho \binom{2\varrho}{\varrho} \binom{n}{2\varrho} (2x)^{n-2\varrho}.$$

Die Normalform 3. verwandelt sich durch die Transformation $x = -\frac{1}{\varepsilon}\xi$ in die allgemeine Laguerresche Gleichung

$$\xi \frac{d^2y}{d\xi^2} + (\delta - \xi) \frac{dy}{d\xi} + \lambda y = 0,$$

die wir folgendermaßen schreiben:

$$x y'' + (k + 1 - x) y' + \lambda y = 0,$$

wobei k irgendeine reelle oder komplexe Zahl sein mag. Die Rekursionsformel (11) lautet jetzt

$$(\nu + 1)(\nu + k + 1) a_{\nu+1} + (\lambda - \nu) a_\nu = 0.$$

Unsere Gleichung erzeugt für $k \neq -1, -2, -3, \ldots$ als (einziges) Sturm-Liouvillesches System die Polynome

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{\varrho=0}^{n} (-1)^\varrho \varrho! \binom{n}{\varrho} \binom{n+k}{\varrho} x^{n-\varrho}.$$

Für $k = 0$ sind dies gewöhnliche und für allgemeines k verallgemeinerte Laguerresche Polynome.

Von der Normalform 4. nehmen wir den Sonderfall $\delta = 0$ vorweg. Unsere Gleichung schreiben wir jetzt

$$x^2 y'' + (k + 1) x y' + \lambda y = 0,$$

und wir erhalten die Rekursionsformel

$$[\nu(\nu + k) + \lambda] a_\nu = 0.$$

Wollen wir erreichen, daß $a_n \neq 0$, so müssen wir setzen

$$\lambda_n = -n(n + k).$$

Für diesen Wert des Parameters gibt es nun tatsächlich eine polynomiale Lösung unserer Gleichung, nämlich

$$P_n(x) = x^n.$$

Diese Lösung ist nur dann nicht die einzige, falls für ein ganzzahliges m aus dem Intervall $0 \leqq m \leqq n - 1$

$$m(m + k) + \lambda_n = 0, \tag{12}$$

in welchem Falle alle Polynome

$$x^n + b_n x^m$$

für beliebige Werte von b_n unsere Gleichung lösen. Die Relation (12) ist gleichbedeutend mit

$$m^2 + mk - n^2 - nk = 0,$$

$$(m - n)(m + n + k) = 0,$$

$$m = -n - k.$$

Sie kommt also dann und nur dann vor, falls k einen der Werte -1 $-2, -3, \ldots$ hat.

Interessanter als der eben behandelte Sonderfall ist der allgemeine Fall $\delta \neq 0$. Durch eine lineare Transformation der Variablen können wir erreichen, daß δ den Wert -1 annimmt:

$$x^2 y'' + ((k+1)x - 1)y' + \lambda y = 0. \tag{13}$$

Die Rekursionsformel lautet jetzt

$$(\nu+1)a_{\nu+1} = [\nu(\nu+k) + \lambda]a_\nu.$$

Für $k = -1, -2, -3, \ldots$ gibt es Paare von nicht negativen ganzen Zahlen m und n, $m < n$, für welche

$$m(m+k) = n(n+k),$$

und für jedes solche n gibt es keine polynomiale Lösung von (13) von *genau* n-tem Grade. Für jeden sonstigen Wert von k erzeugt unsere Gleichung *ein* Polynomsystem

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{\varrho=0}^{n} \varrho! \binom{n}{\varrho} \binom{-n-k}{\varrho} x^\varrho.$$

Für $k = 1$ sind dies Polynome, welche in der Theorie der Besselschen Funktionen eine wichtige Rolle spielen. Die Besselsche Funktion $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, beträgt[1])

$$\frac{e^{i\left[x - \frac{\pi}{2}(n+1)\right]}}{\sqrt{2\pi x}} P_n^{(1)}\left(\frac{1}{2ix}\right) + \frac{e^{-i\left[x - \frac{\pi}{2}(n+1)\right]}}{\sqrt{2\pi x}} P_n^{(1)}\left(\frac{-1}{2ix}\right).$$

Die Normalform 5. schreiben wir folgendermaßen:

$$x(1-x)y'' + (k - (s+1)x)y' + \lambda y = 0.$$

Ihre Rekursionsformel lautet:

$$(\nu+1)(\nu+k)a_{\nu+1} = [\nu(\nu+s) - \lambda]a_\nu.$$

In erster Linie setzen wir voraus: $k \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$. Für $\lambda_n = n(n+s)$ gibt es dann immer ein Polynom n-ten Grades

$$P_n(x) = G(n+s, -n, k; x),$$

welches unserer Gleichung genügt, wobei wir unter $G(a, b, c; x)$ die hypergeometrische Reihe

$$1 + \frac{ab}{1 \cdot c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}x^2 + \ldots$$

verstehen. Diese Polynome sind dann und nur dann für alle n von *genau* n-tem Grade, d. h. sie bilden dann und nur dann ein Sturm-Liouvillesches

[1]) Vgl. z. B. G. N. Watson, Theory of Bessel Functions (1922), p. 53, Formel (1).

System, falls $s \neq -1, -2, -3, \ldots$. Es bedeute nunmehr k einen der bisher ausgeschlossenen Werte $0, -1, -2, -3, \ldots$. Wir ersetzen die Variable x durch die lineare Verbindung $1 - x$, wodurch unsere Gleichung übergeht in

$$x(1-x)y'' + ((s+1-k) - (s+1)x)y' + \lambda y = 0.$$

Die neue Gleichung fällt unter den eben besprochenen Typus, sofern nicht $s+1-k$ einen der Werte $0, -1, -2, -3, \ldots$ hat.

Es bleiben also nur noch die Fälle übrig:

$$k = 0, -1, -2, -3, \ldots, \quad s = -1, -2, -3, \ldots \quad \text{mit} \quad s < k.$$

Diese sehr speziellen Fälle wollen wir aber nicht näher diskutieren, da hierbei keine neuen Besonderheiten zutage treten würden.

(Eingegangen am 1. Juni 1928.)

Ein Satz über lineare Operationen.

Von

S. Bochner in München.

Nach einem Satz von Plancherel kann man jede Funktion $f(x)$ der reellen Variablen x, für welche das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx \tag{1}$$

im Sinne von Lebesgue existiert und einen endlichen Wert hat, durch ein Fourierintegral der Form

$$f(x) \sim \int e^{-i\alpha x} \Gamma(\alpha) \, d\alpha \tag{2}$$

darstellen [1]). Die unter dem Integral stehende Funktion $\Gamma(\alpha)$, die „Transformierte" von $f(x)$, ist eine eindeutig bestimmte Funktion, für welche gleichfalls das (im Lebesgueschen Sinne genommene) Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\alpha)|^2 \, d\alpha \tag{3}$$

vorhanden und endlich ist. Es besteht die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\alpha)|^2 \, d\alpha . \tag{4}$$

Weiterhin besteht die sehr wichtige Reziprozität, daß *jede* Funktion $\Gamma(\alpha)$, für welche das Integral (3) einen endlichen Wert hat, die Transformierte einer (und nur *einer*) passenden Funktion $f(x)$ mit endlichem Integral (1) ist. Die Gesamtheit aller von uns betrachteten Funktionen von x bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}$, die Gesamtheit aller ihrer Transformierten mit $\mathfrak{T}$. — Wir

[1]) Vgl. E. W. Hobson, Theory of functions of a real variable, 2. Auflage, Bd. II, 926, S. 742 ff.

wollen noch angeben, wie die Integration rechts in (2) auszuführen ist. Man bilde für alle $g > 0$ die Funktionen

$$f_g(x) = \int_{-g}^{g} e^{-i\alpha x} \Gamma(\alpha)\, d\alpha.$$

Diese Funktionen sind dann für $g \to \infty$ auf dem ganzen Intervall $-\infty < x < +\infty$ gegen die Funktion $f(x)$ im quadratischen Mittel konvergent:

$$\lim_{g \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_g(x)|^2\, dx = 0.$$

Betrachten wir jetzt eine feste Funktion $O(\alpha)$, von der wir voraussetzen, daß sie in $-\infty < \alpha < +\infty$ beschränkt ist,

$$|O(\alpha)| < A, \tag{5}$$

und in jedem endlichen Intervall nach Lebesgue integrierbar ist. Da jede Funktion aus $\mathfrak{T}$ nach Multiplikation mit $O(\alpha)$ wiederum zur Klasse $\mathfrak{T}$ gehört, können wir mit Hilfe von $O(\alpha)$ einer jeden Funktion (2) aus $\mathfrak{R}$ eine andere Funktion aus $\mathfrak{R}$ zuordnen, nämlich die Funktion

$$\Lambda f(x) \sim \int e^{-i\alpha x} [O(\alpha)\Gamma(\alpha)]\, d\alpha. \tag{6}$$

Den Übergang von $f(x)$ zu $\Lambda f(x)$ fassen wir als eine funktionale Operation in der Gesamtklasse $\mathfrak{R}$ auf, und wir bezeichnen die Funktion $O(\alpha)$ als den zur vorgelegten Operation gehörenden „Operator".

Unsere Operation Λf besitzt die folgenden Eigenschaften:

I. sie ist *linear-distributiv*, in Formeln

$$\Lambda(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 \Lambda f_1(x) + c_2 \Lambda f_2(x);$$

II. sie ist *beschränkt*, d. h. es besteht die Relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Lambda f(x)|^2\, dx \leqq G^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx, \tag{7}$$

wo G^2 eine von $f(x)$ unabhängige Konstante bedeutet. Auf Grund von (4), (5) und (6) trifft nämlich die Ungleichung (7) mit $G = A$ zu;

III. sie ist *mit der Differentiation vertauschbar*,

$$\frac{d}{dx}(\Lambda f(x)) = \Lambda \frac{d}{dx} f(x).$$

Letztere Behauptung ist so zu verstehen. Falls für zwei Funktionen $f(x)$ und $f_1(x)$ aus $\mathfrak{R}$ die Relation $f_1(x) = f'(x)$ besteht, so genügen ihre zugeordneten Funktionen der Relation

$$\Lambda f_1(x) = \frac{d}{dx} \Lambda f(x).$$

Diese Eigenschaft unserer Operation ist eine unmittelbare Konsequenz des folgenden Satzes [2]). Besitzt eine Funktion (2) eine Ableitung, die gleichfalls zur Klasse $\mathfrak{K}$ gehört, so kann man die Fourierdarstellung von $f'(x)$ durch formale Differentiation der Fourierdarstellung von $f(x)$ erhalten:

$$f'(x) \sim \int e^{-i\alpha x}[-i\alpha\Gamma(\alpha)]\,d\alpha.$$

Im folgenden wollen wir beweisen, daß die angegebenen drei Eigenschaften für unsere Operationen charakteristisch sind; d. h. *daß jede in der ganzen Klasse $\mathfrak{K}$ definierte Operation Af, welche den Eigenschaften* I. *bis* III. *genügt, sich durch einen Operator $O(\alpha)$ erzeugen läßt.*

Es liege eine Operation Af vor, welche die drei Eigenschaften besitzt. Wir betrachten für beliebiges $g > 0$ die Funktion

$$f_g(x) = \int_{-g}^{g} e^{-i\alpha x}\,d\alpha \tag{8}$$

und ihre zugeordnete Funktion

$$Af_g(x) \sim \int e^{-i\alpha x}\gamma_g(\alpha)\,d\alpha.$$

Die Funktion (8) besitzt Ableitungen beliebiger hoher Ordnung, die alle zur Klasse $\mathfrak{K}$ gehören:

$$f_g^{(k)}(x) = (-i)^k \int_{-g}^{g} e^{-i\alpha x}\alpha^k\,d\alpha.$$

Die entsprechenden zugeordneten Funktionen lauten auf Grund von III.

$$Af_g^{(k)}(x) \sim (-i)^k \int e^{-i\alpha x}\alpha^k\gamma_g(\alpha)\,d\alpha \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Auf Grund von II. besteht nunmehr, vgl. (4), die Relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^{2k}|\gamma_g(\alpha)|^2\,d\alpha \leqq G^2 \int_{-g}^{g} \alpha^{2k}\,d\alpha \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

und daraus folgt

$$\gamma_g(\alpha) = 0 \quad \text{für} \quad |\alpha| > g.$$

Dann wäre

$$\int_{-\infty}^{-g} + \int_{g}^{\infty} |\gamma_g(\alpha)|^2\,d\alpha = \eta > 0,$$

so würde dies die für große Werte von k widerspruchsvolle Relation

$$\eta g^{2k} \leqq \frac{2G^2}{2k+1} g^{2k+1}$$

zur Folge haben.

---

[2]) Dieser Satz, der auch direkt leicht bewiesen werden kann, ist in einem allgemeineren Satz des Verfassers enthalten: Darstellung reellvariabler und analytischer Funktionen usw., Math. Annalen **97** (1927), S. 650, Satz VI.

Versteht man unter $p(\alpha)$ irgendein Polynom in α, so geht die Funktion

$$\int_{-g}^{g} e^{-i\alpha x} p(\alpha)\, d\alpha \tag{9}$$

bei unserer Operation in die Funktion

$$\int_{-g}^{g} e^{-i\alpha x} p(\alpha)\, \gamma_g(\alpha)\, d\alpha \tag{10}$$

über. Denn für Monome ist dies, wie wir bereits benutzt haben, eine Folge von III., und der Fall allgemeiner Polynome ergibt sich hieraus auf Grund der Eigenschaft I.

Es sei jetzt allgemeiner $p(\alpha)$ irgendeine (integrierbare) Funktion, zu der eine Folge von *Polynomen* $p_1(\alpha)$, $p_2(\alpha)$, $p_3(\alpha)$, ... angegeben werden kann, für welche

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-g}^{g} |p(\alpha) - p_n(\alpha)|^2\, d\alpha = 0, \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-g}^{g} |p(\alpha) - p_n(\alpha)|^2\, |\gamma_g(\alpha)|^2\, d\alpha = 0. \tag{12}$$

Wendet man den Satz (4) auf die mit irgendwelchen Funktionen

$$f_n(x) \sim \int e^{-i\alpha x} \Gamma_n(a)\, d\alpha \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$f(x) \sim \int e^{-i\alpha x}\, \Gamma(\alpha)\, d\alpha$$

aus $\mathfrak{R}$ gebildeten Differenzen $f(x) - f_n(x)$ an, so findet man, daß von den Limesrelationen

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_n(x)|^2\, dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\alpha) - \Gamma_n(\alpha)|^2\, d\alpha = 0$$

jede die andere nach sich zieht. Die Relationen (11) und (12) sind also damit gleichbedeutend, daß die Funktionen

$$\varphi_n(x) = \int_{-g}^{g} e^{-i\alpha x} p_n(\alpha)\, d\alpha$$

gegen die Funktion

$$\varphi(x) = \int_{-g}^{g} e^{-i\alpha x} p(\alpha)\, d\alpha$$

und die Funktionen

$$\Lambda\varphi_n(x) = \int_{-g}^{g} e^{-i\alpha x} p_n(\alpha)\, \gamma_g(\alpha)\, d\alpha$$

gegen die Funktion

$$\Phi(x) = \int_{-g}^{g} e^{-i\alpha x}\, p(\alpha)\, \gamma_g(\alpha)\, d\alpha$$

im Mittel konvergent sind. Nun sind aber die Funktionen $A\varphi_n(x)$ mittelkonvergent gegen $A\varphi(x)$; dies folgt aus der Eigenschaft II., wenn man sie auf die Funktionen $f(x) = \varphi(x) - \varphi_n(x)$ anwendet:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{+\infty}^{+\infty} |A\varphi(x) - A\varphi_n(x)|^2\, dx \leqq G^2 \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) - \varphi_n(x)|^2\, dx\,.$$

Daher[3]) ist $\Phi(x) = A\varphi(x)$. D. h. die Zuordnung von (9) und (10) bleibt bestehen, wenn die Funktion $p(\alpha)$ in geeigneter Weise durch Polynome $p_n(\alpha)$ „approximiert" werden kann.

Den Bedingungen (11) und (12) kann man immer dann Genüge leisten, wenn die Funktion $p(\alpha)$ eine beschränkte Funktion ist, sofern nur von der Funktion $\gamma_g(\alpha)$ bekannt ist, daß sie zur Klasse $\mathfrak{T}$ gehört[4]). Auf Grund

[3]) Vgl. E. W. Hobson, loc. cit., insbesondere §§ 173—177.

[4]) Man kann dies etwa folgendermaßen beweisen. Jede Folge von integrierbaren Funktionen $p_n(\alpha)$, welche gleichartig beschränkt sind,

$$|p_n(\alpha)| \leqq B, \qquad (-g \leqq \alpha \leqq g;\ n = 1, 2, 3, \ldots),$$

und welche fast überall gegen $p(\alpha)$ konvergieren, befriedigen die Relationen (11) und (12). Denn nach einem bekannten Satz ist die Folge $p_n(\alpha)$, wenn man von einer Punktmenge E von beliebigem kleinen Maße, $mE \leqq \eta$, absieht, gleichmäßig gegen $p(\alpha)$ konvergent. Daher ist:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{-g}^{g} |p(\alpha) - p_n(\alpha)|^2\, d\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{E} |p(\alpha) - p_n(\alpha)|^2\, d\alpha \leqq 4C^2\eta,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{-g}^{g} |p(\alpha) - p_n(\alpha)|^2\, |\gamma_g(\alpha)|^2\, d\alpha \leqq 4C^2 \int_{E} |\gamma_g(\alpha)|^2\, d\alpha \leqq 4C^2 e(\eta).$$

Hierin ist C eine gemeinsame Schranke für die Funktionen $p(\alpha)$ und $p_n(\alpha)$, und $e(\eta)$ eine Funktion von η, welche wegen der Totalstetigkeit des Lebesgueschen Integrals mit η gegen 0 abnimmt. Da η beliebig klein vorausgesetzt werden kann, bestehen tatsächlich die Relationen (11) und (12).

Für $\alpha \geqq g$ definieren wir $p(\alpha) = 0$ und bilden für $h > 0$ die Funktionen

$$\varphi(h;\, \alpha) = \frac{1}{h} \int_{0}^{h} p(\alpha + t)\, dt.$$

Da das unbestimmte Integral der Funktion $p(\alpha)$ fast überall differenzierbar ist, sind die Funktionen $\varphi(h;\, \alpha)$ für $h \to 0$, und insbesondere die Funktionen

$$q_n(\alpha) = \varphi\left(\frac{1}{n};\ \alpha\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(Fortsetzung der Fußnote [4]) auf der nächsten Seite.)

dessen können wir schließen, daß für unsere Transformierte $\gamma_g(\alpha)$ die Relation besteht

$$|\gamma_g(\alpha)| \leqq G.$$

Zum Beweise benutzen wir, daß wegen der Eigenschaft II. jede „zulässige“ Funktion $p(\alpha)$ der Ungleichung

$$\int_{-g}^{+g} |p(\alpha)\gamma_g(\alpha)|^2 d\alpha \leqq G^2 \int_{-g}^{g} |p(\alpha)|^2 d\alpha \tag{13}$$

genügt. Wenn nunmehr auf einer Punktmenge E vom positiven Maße, $mE > 0$, die Ungleichung $|\gamma_g(\alpha)| \geqq G + \varepsilon$ bestünde, so würde, wie man sehr leicht sieht, die Funktion $p(\alpha)$, welche auf der Punktmenge E den Wert 1 und sonst den Wert 0 annimmt, nicht der Relation (13) genügen können.

Wenn aber $\gamma_g(\alpha)$ eine beschränkte Funktion ist, so ist die Limesrelation (12) eine Folge der Relation (11). In Hinblick darauf besteht die Zuordnung von (9) zu (10) immer dann, wenn von der Funktion $p(\alpha)$ nur bekannt ist, daß sie zur Klasse $\mathfrak{T}$ gehört, weil für jede solche Funktion die Relation (11) mit passenden Polynomen $p_n(\alpha)$ erfüllt werden kann[5]).

Betrachten wir nunmehr die Transformierten $\gamma_{g_1}(\alpha)$ und $\gamma_{g_2}(\alpha)$ für $g_1 > g_2 (> 0)$. Für $p(\alpha)$ setzen wir diejenige Funktion ein, welche in $-g_2 \leqq \alpha \leqq g_2$ den Wert 1 und sonst den Wert 0 annimmt. Der Funktion $\int_{-g_1}^{g_1} e^{-i\alpha x} p(\alpha) d\alpha$, d. h. der Funktion $\int_{-g_2}^{g_2} e^{-i\alpha x} d\alpha$ entspricht die Funktion $\int_{-g_1}^{g_1} e^{-i\alpha x} p(\alpha)\gamma_{g_1}(\alpha) d\alpha$, d. h. die Funktion $\int_{-g_2}^{g_2} e^{-i\alpha x} \gamma_{g_2}(\alpha) d\alpha$. Daraus folgt

$$\gamma_{g_1}(\alpha) = \gamma_{g_2}(\alpha) \quad \text{für} \quad -g_2 \leqq \alpha \leqq g_2.$$

Es gibt daher eine in $-\infty < \alpha < +\infty$ definierte Funktion $\gamma(\alpha)$, für welche

$$|\gamma(\alpha)| \leqq G, \tag{14}$$

derart, daß für jedes $g > 0$

$$\gamma_g(\alpha) = \gamma(\alpha); \qquad |\alpha| \leqq g.$$

---

fast überall gegen $p(\alpha)$ konvergent. Wegen der Beschränktheit von $p(\alpha)$ ist die Folge $q_n(\alpha)$ gleichartig beschränkt, weiterhin ist jede Funktion $q_n(\alpha)$ stetig. Wenn man nunmehr $q_n(\alpha)$ bis auf einen Fehler von der Größe $\frac{1}{n}$ durch ein Polynom $p_n(\alpha)$ in $|\alpha| \leqq g$ approximiert, erhält man eine Folge von Polynomen von der im Text vorausgesetzten Beschaffenheit.

[5]) Vgl. hierzu [4]).

Diese Funktion $\gamma(\alpha)$ ist, wie wir nachweisen wollen, der gesuchte Operator $O(\alpha)$.

Wir wissen bereits, daß für jede Funktion $\Gamma(\alpha)$ aus $\mathfrak{T}$, welche außerhalb eines genügend großen Intervalles verschwindet, die Funktion

$$f(x) \sim \int e^{-i\alpha x}\,\Gamma(\alpha)\,d\alpha \tag{15}$$

in die Funktion

$$Af(x) \sim \int e^{-i\alpha x}\,\gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha)\,d\alpha \tag{16}$$

übergeht. Ist $\Gamma(\alpha)$ eine allgemeine Funktion aus $\mathfrak{T}$, so bilde man die „abgeschnittenen" Funktionen

$$\begin{aligned} \Gamma_n(\alpha) &= \Gamma(\alpha) && |\alpha| \leqq n, \\ \Gamma_n(\alpha) &= 0 && |\alpha| > n \end{aligned} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Für die Funktionen $\int e^{-i\alpha x}\,\Gamma_n(\alpha)\,d\alpha$ und $\int e^{-i\alpha x}\,\gamma(\alpha)\,\Gamma_n(\alpha)\,d\alpha$ haben wir die Zuordnung bereits sichergestellt. Wegen, vgl. (14),

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma_n(\alpha) - \Gamma(\alpha)|^2\,d\alpha = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(\alpha)|^2\,|\Gamma_n(\alpha) - \Gamma(\alpha)|^2\,d\alpha = 0$$

können wir sie daher, nach einer schon oben angestellten Überlegung, auch für die Funktionen (15) und (16) behaupten. W. z. b. w.

(Eingegangen am 1. Juli 1928.)

Bemerkungen zu einem Satze von S. Bernstein aus der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen.

Von

Eberhard Hopf in Berlin-Dahlem.

Man verdankt Herrn Serge Bernstein den folgenden bemerkenswert allgemeinen

Satz[1]). *Es sei*

$$L(u) \equiv A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

eine für alle x, y elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung; A, B, C seien endliche Funktionen von x, y, und die Form $A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2$ sei stets etwa positiv definit. Dann ist jede in der ganzen x-y-Ebene beschränkte zweimal stetig differentiierbare Lösung $u(x, y)$ von $L(u) = 0$ eine Konstante.

Speziell für $L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ enthält dieser Satz das bekannte Theorem von Liouville. Man kann versuchen, den Bernsteinschen Satz nach verschiedenen Richtungen in plausibler Weise zu verallgemeinern. Doch zeige ich im folgenden durch Gegenbeispiele,

1. daß im Bernsteinschen Satze der Passus „beschränkte Lösung" nicht durch den Passus „überall positive Lösung" ersetzt werden darf, mit anderen Worten, daß die entsprechende Verallgemeinerung des Theorems von Harnack über in der ganzen Ebene positive harmonische Funktionen nicht richtig ist;

2. daß im Bernsteinschen Satze die Voraussetzung $L(u) = 0$ nicht durch die schwächere Voraussetzung $L(u) \geqq 0$ ersetzt werden kann[2]);

---

[1]) Vgl. S. Bernstein, Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 551—558.

[2]) Im Spezialfalle $L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ist dies noch richtig. Man zeigt nämlich leicht, daß eine in der ganzen Ebene beschränkte subharmonische Funktion eine Konstante sein muß.

3. daß der Bernsteinsche Satz für mehr als zwei unabhängige Variable nicht mehr gilt[3]).

Zum Punkte 1. Wählen wir speziell in $L(u)$

$$A(x, y) = 1 + e^y, \quad B(x, y) = 1, \quad C(x, y) = e^{-y},$$

so ist $L(u) = 0$ elliptisch, da für $\lambda^2 + \mu^2 > 0$ stets

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = \lambda^2 + \left(\lambda e^{\frac{y}{2}} + \mu e^{-\frac{y}{2}}\right)^2 > 0$$

ist.

$$u(x, y) = e^{x - e^y}$$

ist eine überall positive Lösung, da

$$L(u) = u\{A - 2Be^y + C(e^{2y} - e^y)\} = 0$$

ist.

Zum Punkte 2. Unter Beibehaltung der eben gewählten Bezeichnungen setzen wir

$$\bar{u}(x, y) = e^{-u(x, y)}.$$

Dann ist stets $0 < \bar{u} < 1$ und

$$L(\bar{u}) = \bar{u} \cdot \left\{A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} > 0,$$

da $\frac{\partial u}{\partial x} = u$ niemals Null ist.

Zum Punkte 3. Wir haben also

$$L(\bar{u}) = \bar{u} \cdot p(x, y), \qquad p(x, y) > 0.$$

Der Differentialausdruck in drei unabhängigen Variablen x, y, z

$$A(v) = A(x, y)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + p(x, y)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

ist für alle Werte von x, y, z elliptisch, da für $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 > 0$ stets

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 + p\nu^2 > 0$$

ausfällt. Setzt man

$$v(x, y, z) = \bar{u}(x, y) \cdot \sin z,$$

so ist offenbar für alle x, y, z

$$A(v) = 0, \qquad |v| < 1.$$

[3]) Jedoch gilt bekanntlich der Satz von Liouville in beliebig viel Dimensionen.

(Eingegangen am 7. Juli 1928.)

Über ein Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

A. Khintchine in Moskau.

Die Untersuchungen, die zu dem hier dargestellten allgemeinen Satz geführt hatten, waren zwecks statistisch-mechanischer Anwendungen angestellt; da sich aber dabei für das Problem eine allgemeine und unerwartet einfache Lösung ergab und auch die Fragestellung ganz allgemein gefaßt werden konnte, so dürfte das Ergebnis auch wohl das Interesse des Mathematikers beanspruchen, zumal auch die dabei verfolgte Methode für die Wahrscheinlichkeitsrechnung gewissermaßen neu erscheinen könnte.

Ich betrachte eine Wahrscheinlichkeitsgröße x, die nur positive Werte annehmen kann; bedeutet $F(u)$ die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung $x \leqq u$, so ist folglich $F(u) = 0$ für $u \leqq 0$ und $F(u) < 1$ für genügend kleine positive u; im übrigen soll $F(u)$ nur der selbstverständlichen Forderung der Monotonie und der Limesbedingung $F(\infty) = 1$ unterworfen sein. Ich denke mir eine unbegrenzte Reihe von gegenseitig unabhängigen Versuchen angestellt, deren i-ter für x den Wert x_i ergeben möge; und ich frage nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Ungleichung

$$x_{i+1} > \sum_{j=1}^{i} x_j$$

sich in dieser Versuchsreihe *unendlich oft* realisiert, daß also x immer wieder einen Wert erhält, welcher die Summe aller vorangehenden (früher erhaltenen) Werte übertrifft.

Die Antwort lautet sehr einfach; bedeutet nämlich W die gesuchte Wahrscheinlichkeit, so besteht der

Satz. *Es ist* $W = 0$ *oder* $W = 1$, *je nachdem das Integral*

$$\int_0^\infty u \, d\, F(u)$$

konvergiert oder divergiert, je nachdem also x eine endliche oder unendliche mathematische Erwartung hat.

Nur der Kürze halber will ich beim Beweise voraussetzen, daß $F(x)$ absolut stetig und $F'(x) = f(x)$ quadratisch integrierbar ist. Anderenfalls hätte man es nämlich durchweg mit mehrfachen Stieltjesschen Integralen zu tun; und die Umformungen, welche ich benötige, sind für solche Integrale zwar im Prinzip leicht zu verifizieren, erfordern aber ziemlich weitläufige Rechtfertigungen, wenn man alles beweisen will. Es wird zweifellos dem Leser nicht viel Mühe kosten, nach der hier geschilderten Methode den Beweis auch für den allgemeinsten Fall durchzuführen.

Beweis. ($F(u)$ ist absolut stetig, $F'(u) = f(u)$ quadratisch integrabel in jedem endlichen Intervall.)

I. *Das Integral*

$$\int_0^\infty u f(u)\, du$$

sei konvergent. Ich bezeichne mit W_n die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung

$$x_{n+1} > x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

und bin mit dem Beweis offenbar fertig, wenn ich die Konvergenz der Reihe $\sum_n W_n$ beweisen kann. Nun ist offenbar

$$W_n = \int_0^\infty f(u)\, du \int_{\sum_{i=1}^{n} x_i < u}^{(n)} f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

wo $\int^{(n)}$ ein n-faches Integral bedeutet. Setze ich

$$\chi_0(u) = 1, \qquad \chi_n(u) = \int_{\sum_{i=1}^{n} x_i < u}^{(n)} f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$(n = 1, 2, \ldots),$$

so wird

$$\chi_n(u) = \int_0^u f(x_1)\, dx_1 \int_{\sum_{i=2}^{n} x_i < u - x_1}^{(n-1)} f(x_2) \ldots f(x_n)\, dx_2 \ldots dx_n = \int_0^u \chi_{n-1}(u - x) f(x)\, dx,$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Es sei ferner η eine positive Zahl, die so klein gewählt werden soll, daß

$$F(\eta) = \int_0^\eta f(u)\, du = r < 1$$

ausfällt; dann erhält man, da $\chi_n(u)$ in bezug auf u offenbar eine monoton nicht abnehmende Funktion ist,

$$\chi_n(u) \leqq \chi_{n-1}(u) \int_0^\eta f(x)\,dx + \chi_{n-1}(u-\eta) \int_\eta^\infty f(x)\,dx$$
$$= r\,\chi_{n-1}(u) + (1-r)\,\chi_{n-1}(u-\eta) \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

setzt man noch

$$\sum_{n=1}^{m} \chi_n(u) = S_m(u),$$

so folgt wegen $\chi_0(u) = 1$

$$S_m(u) \leqq r\{S_{m-1}(u) + 1\} + (1-r)\{S_{m-1}(u-\eta) + 1\}$$
$$\leqq r\,S_m(u) + (1-r)\,S_m(u-\eta) + 1,$$

also

$$(1-r)\{S_m(u) - S_m(u-\eta)\} \leqq 1,$$

d. h.

$$(0 \leqq)\ S_m(u) - S_m(u-\eta) \leqq \frac{1}{1-r} = \tau \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Wegen $S_m(0) = 0$ ergibt das sofort

$$S_m(k\eta) \leqq k\tau \qquad (m = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots),$$

also [1])

$$S_m(u) \leqq S_m\left(\left\{\left[\frac{u}{\eta}\right] + 1\right\}\eta\right) \leqq \left\{\left[\frac{u}{\eta}\right] + 1\right\}\tau \leqq \tau + \frac{\tau}{\eta}\,u \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Nun ist

$$\sum_{k=1}^{n} W_k = \int_0^\infty S_n(u)\,f(u)\,du \leqq \tau + \frac{\tau}{\eta}\int_0^\infty u\,f(u)\,du,$$

bleibt also für $n \to \infty$ unterhalb einer endlichen Schranke, womit alles bewiesen ist.

II. *Das Integral* $\int_0^\infty u\,f(u)\,du$ *sei divergent.* Für diesen Fall gestaltet sich der Beweis wesentlich komplizierter; der Übersichtlichkeit halber will ich ihn deshalb in einzelne Punkte einteilen.

1. Zunächst ergibt partielle Integration

$$\int_0^a u\,f(u)\,du = a\,F(a) - \int_0^a F(u)\,du < \int_0^a \{1 - F(u)\}\,du,$$

so daß das letzte Integral für $a \to \infty$ divergiert.

[1]) Hierin bedeutet $\left[\frac{u}{\eta}\right]$ die größte ganze Zahl $\leqq \frac{u}{\eta}$.

2. Ich bezeichne mit $P_{n,k}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Ungleichung

$$x_{i+1} \leqq x_1 + x_2 + \ldots + x_i$$

für $i = n,\ n+1,\ \ldots,\ n+k-1$ erfüllt wird, und habe offenbar nur zu beweisen, daß für jedes feste n

$$\lim_{k \to \infty} P_{n,k} = 0$$

ist.

Offenbar ist, $\sum_{i=1}^{n} x_i = s_n$ gesetzt,

$$P_{n,k} = \int^{(n)} f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$
$$\times \int_0^{s_n} f(u_1)\, du_1 \int_0^{s_n+u_1} f(u_2)\, du_2 \ldots \int_0^{s_n+u_1+\ldots+u_{k-1}} f(u_k)\, du_k,$$

wo das äußere Integral über den ganzen n-dimensionalen Raum zu erstrecken ist; dafür kann auch geschrieben werden

$$P_{n,k} = \int_0^{\infty} \psi_k(a)\, \chi_n'(a)\, da,$$

wo $\chi_n(a)$ in I. erklärt und

$$\psi_k(a) = \int_0^{a} f(u_1)\, du_1 \int_0^{a+u_1} f(u_2)\, du_2 \ldots \int_0^{a+u_1+\ldots+u_{k-1}} f(u_k)\, du_k$$

ist.

3. Ich merke nun die folgenden evidenten Eigenschaften der Funktionen $\psi_k(a)$ an:

1°. $0 \leqq \psi_k(a) < 1$;

2°. $\psi_{k+1}(a) = \int_0^{a} \psi_k(a+u) f(u)\, du$;

3°. $\psi_k(a)$ ist in bezug auf a monoton nicht abnehmend;

4°. $\psi_{k+1}(a) \leqq \psi_k(a)$; denn es ist

$$\psi_k(a) - \psi_{k+1}(a) = \int_0^{a} f(u_1)\, du_1 \int_0^{a+u_1} f(u_2)\, du_2 \ldots$$
$$\times \int_0^{a+u_1+\ldots+u_{k-1}} [1 - F(a+u_1+\ldots+u_k)]\, f(u_k)\, du_k \geqq 0.$$

4. Wegen 1°. und 4°. ist für jedes $a \geqq 0$

$$\lim_{k \to \infty} \psi_k(a) = \psi(a)$$

vorhanden und $0 \leqq \psi(a) < 1$; wegen 3° ist ferner $\psi(a)$ in bezug auf a monoton (nicht abnehmend). Mit Rücksicht auf 2°. liegt die Vermutung

nahe, daß $\psi(a)$ der Funktionalgleichung

$$\psi(a) = \int_0^a \psi(a+u) f(u)\, du \tag{1}$$

genügt. Man bestätigt sie leicht folgendermaßen: Erstens ist wegen 2°.

$$\begin{aligned} &\psi(a) - \int_0^a \psi(a+u) f(u)\, du \\ &= \psi(a) - \psi_{k+1}(a) - \int_0^a [\psi(a+u) - \psi_k(a+u)] f(u)\, du, \end{aligned} \tag{2}$$

und hierin ist die erste Differenz rechts absolut beliebig klein bei genügend großem k. Was zweitens das rechtsstehende Integral betrifft, so ist nach der Schwarzschen Ungleichung sein Quadrat nicht größer als

$$\int_0^a [\psi(a+u) - \psi_k(a+u)]^2\, du \cdot \int_0^a [f(u)]^2\, du.$$

Hierin ist der erste Faktor bei genügend großem k beliebig klein, da für die konvergente und in ihrer Gesamtheit beschränkte Funktionenfolge $\{\psi_k\}$ selbstverständlich auch Mittelkonvergenz stattfindet; der zweite Faktor ist aber von k unabhängig. Folglich ist die rechte Seite von (2) unendlich klein für $k \to \infty$; die linke Seite, die nicht von k abhängt, muß daher verschwinden, womit (1) bewiesen ist.

5. Die gewonnene Funktionalgleichung (1) wollen wir nun umformen. Es ist erstens für $w > 0$ wegen $F(0) = 0$

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^w F(u)[2\psi(2u) - \psi(w+u)]\, du \\ &= \Big[F(u)\int_0^w [\psi(w+b) - 2\psi(2b)]\, db\Big]_{u=0}^{u=w} \\ &\qquad + \int_0^w f(u)\Big\{\int_0^w [2\psi(2b) - \psi(w+b)]\, db\Big\} du \\ &= \int_0^w f(u)\, du \Big\{\int_u^w 2\psi(2b)\, db - \int_u^w \psi(w+b)\, db\Big\} \\ &= \int_0^w f(u)\Big\{\int_{2u}^{2w} \psi(a)\, da - \int_{w+u}^{2w} \psi(a)\, da\Big\} du \\ &= \int_0^w f(u)\, du \int_{2u}^{w+u} \psi(a)\, da = \int_0^w f(u)\, du \int_u^w \psi(u+a)\, da \\ &= \int_0^w da \int_0^a \psi(a+u) f(u)\, du. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Und es ist zweitens für $w > 0$

$$(4)\quad \int_0^w [2\psi(2u) - \psi(w+u)]\,du = \int_0^{2w} \psi(a)\,da - \int_w^{2w} \psi(a)\,da = \int_0^w \psi(a)\,da.$$

Nun sind nach (1) die rechten Seiten von (3) und (4) einander gleich; indem wir die linken Seiten einander gleich setzen, erhalten wir

$$\int_0^w F(u)[2\psi(2u) - \psi(w+u)]\,du = \int_0^w [2\psi(2u) - \psi(w+u)]\,du,$$

und folglich

$$(5)\quad \int_0^w [1 - F(u)]\psi(2u)\,du = \int_0^w [1 - F(u)][\psi(w+u) - \psi(2u)]\,du.$$

6. Ich setze nun

$$\lim_{u\to\infty} \psi(u) = c;$$

der Limes existiert, da $\psi(u)$ monoton uud beschränkt ist, und es ist $c \geqq 0$. Ich will beweisen, daß $c = 0$ ist, woraus selbstverständlich $\psi(u) \equiv 0$ folgt.

Zu dem Ende wähle ich $v > 0$ so groß, daß für $u \geqq v$ die Funktion $\psi(u) \geqq \frac{2}{3}c$ ist, dann gilt einerseits

$$\int_0^w [1 - F(u)]\psi(2u) = K_1 + \int_v^w [1 - F(u)]\psi(2u)\,du$$

$$\geqq K_1 + \frac{2}{3}c\int_v^w [1 - F(u)]\,du$$

und andererseits

$$\int_0^w [1 - F(u)][\psi(w+u) - \psi(2u)]\,du \leqq \int_0^w [1 - F(u)][c - \psi(2u)]\,du$$

$$= K_2 + \int_v^w [1 - F(u)][c - \psi(2u)]\,du \leqq K_2 + \frac{1}{3}c\int_v^w [1 - F(u)]\,du,$$

wobei $w > v$ vorausgesetzt ist und K_1 bzw. K_2 Zahlen bedeuten, welche von w unabhängig sind. Aus (5) folgt

$$K_1 + \frac{2}{3}c\int_v^w [1 - F(u)]\,du \leqq K_2 + \frac{1}{3}c\int_v^w [1 - F(u)]\,du,$$

$$c \leqq \frac{3(K_2 - K_1)}{\int_v^w [1 - F(u)]\,du};$$

hierbei wird der Nenner nach 1. für $w \to \infty$ unendlich groß, während der Zähler konstant bleibt. Folglich ist $c = 0$ und a fortiori $\psi(u) \equiv 0$.

7. Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein; ich wähle zunächst b so groß, daß

$$\int_b^\infty \chi_n'(u)\,du < \varepsilon$$

und zweitens k so groß, daß $\psi_k(b) < \varepsilon$ ist. Dann gilt

$$P_{n,k} = \int_0^\infty \psi_k(a)\,\chi_n'(a)\,da \leqq \int_0^b \psi_k(b)\,\chi_n'(a)\,da + \int_b^\infty \chi_n'(a)\,da < 2\varepsilon,$$

also

$$P_{n,k} \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty,$$

womit nach 2. alles bewiesen ist.

Göttingen, 12. 8. 1928.

(Eingegangen am 22. September 1928.)

Druckfehler.

S. 266	Z. 7 v. u.	lies	Pólya	an Stelle	von		Pòlya
S. 267	Z. 1 v. u.	„	Pólya	„	„	„	Pòlya
S. 461	Z. 2 v. o.	„	*für*	„	„	„	*fur*
S. 461	Z. 2 v. o.	„	*ist*	„	„	„	*is*
S. 461	Z. 8 v. o.	„	$\lvert g^2(x)\,h^2(x)\rvert$	„	„	„	$g^2(x)\,h^2(x)\rvert$